

XIX.- RADIACIÓN TÉRMICA

FUNDAMENTOS Y FACTORES DE FORMA

XIX.1.- INTRODUCCIÓN

La forma radiativa de la transmisión del calor se caracteriza porque la energía se transporta en forma de ondas electromagnéticas, que se propagan a la velocidad de la luz. El transporte de energía por radiación se puede realizar entre superficies separadas por el vacío; así por ejemplo, el Sol transmite energía a la Tierra por radiación a través del espacio que, una vez interceptada por la Tierra, se transforma en otras fuentes de energía.

La *teoría ondulatoria* establece que la radiación se comporta como una onda que oscila con una frecuencia ν y una longitud de onda λ .

El producto de la frecuencia por la longitud de onda es la velocidad de la luz \vec{c} :

$$c = \lambda \nu$$

La *teoría corpuscular* admite que la energía radiante se transporta en forma de fotones. Cada fotón se propaga con la velocidad de la luz a un nivel energético de la forma:

$$e = h \nu$$

en la que h es la constante de Planck.

Los fotones de mayor frecuencia poseen más energía que los de menor frecuencia. Cuando un cuerpo se calienta, los electrones libres pueden saltar a niveles de mayor energía o niveles excitados; cuando un electrón vuelve a su nivel energético inferior emite un fotón cuya energía es igual a la diferencia energética entre el estado excitado y el estado fundamental. En toda superficie y en cualquier instante existen numerosos electrones que experimentan cambios en su nivel energético y, por lo tanto, la energía que abandona esta superficie se distribuye dentro de un espectro de frecuencias.

La energía se emite solamente en función de la temperatura del cuerpo; la energía que abandona la superficie se llama *radiación térmica*. En el extremo del espectro correspondiente a longitudes de onda pequeñas están los rayos X, mientras que en el otro extremo del espectro están las ondas de radio; entre

estos límites está la radiación térmica que se emite por un cuerpo que depende exclusivamente de su temperatura; el intervalo completo de todas las longitudes de onda constituye el espectro electromagnético, que se subdivide en un cierto número de intervalos de longitudes de onda, correspondientes a unas fenomenologías características, como ultravioleta, visible, infrarrojo, etc.

La radiación térmica emitida por una superficie en función de su temperatura se corresponde con las longitudes de onda comprendidas entre, 10^{-7} m y 10^{-4} m.

El ojo humano es capaz de detectar las ondas electromagnéticas comprendidas en el intervalo, $3,8 \cdot 10^{-7}$ m ÷ $7,6 \cdot 10^{-7}$ m, que constituye la *radiación visible* del espectro electromagnético; es una porción muy pequeña del espectro completo que, a su vez, se encuentra en el intervalo correspondiente a la radiación térmica. Las longitudes de onda se miden en distintas unidades de longitud, como:

$$1 \text{ \AA} = 1 \text{ Angstrom} = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-8} \text{ cm}$$

$$1 \text{ }\mu\text{m} = 1 \text{ micrón} = 10^{-6} \text{ m} = 10^4 \text{ \AA}$$

XIX.2.- FÍSICA DE LA RADIACIÓN

CUERPO NEGRO.- No todas las superficies emiten o absorben la misma cantidad de energía radiante cuando se calientan a la misma temperatura. Un cuerpo que emite (radiación difusa) o absorbe la máxima cantidad de energía a una temperatura determinada es un *cuerpo negro*, que no es más que un modelo ideal al que se pueden aproximar en la práctica los cuerpos reales recubriendo su superficie con determinadas pinturas o modificando su forma; es, por lo tanto, un cuerpo estándar con el que pueden compararse otros cuerpos radiadores.

LEY DE PLANCK.- Cuando un cuerpo negro se calienta a una temperatura T, emite fotones desde su superficie, los cuales poseen una distribución determinada de energía que depende de la temperatura superficial; Max Planck en 1900 demostró que la energía emitida por un cuerpo negro a una longitud de onda y temperatura T es de la forma:

$$E_b(T) = \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)}, \text{ siendo, } \begin{matrix} C_1 = 3,7418 \times 10^{-16} \text{ W}\cdot\text{m}^2 \\ C_2 = 1,4388 \times 10^{-2} \text{ m}^\circ\text{K} \end{matrix}$$

en la que E_b es la potencia emisiva espectral o monocromática del cuerpo negro a la temperatura T, en W/m^3 .

La variación de la potencia emisiva monocromática del cuerpo negro con la temperatura y con la longitud de onda, se denomina *Ley de Planck*, Fig XIX.1. La energía radiativa emitida por una superficie negra aumenta con la temperatura; la potencia emisiva pasa por un valor máximo para una longitud de onda determinada que depende de la temperatura a que se encuentre; la longitud de onda disminuye cuando la temperatura de la superficie aumenta.

LEY DEL DESPLAZAMIENTO DE WIEN.- La longitud de onda a la cual la potencia emisiva del cuerpo negro alcanza un valor máximo para una temperatura dada, se deduce de la ley de Planck imponiendo la condición de máximo:

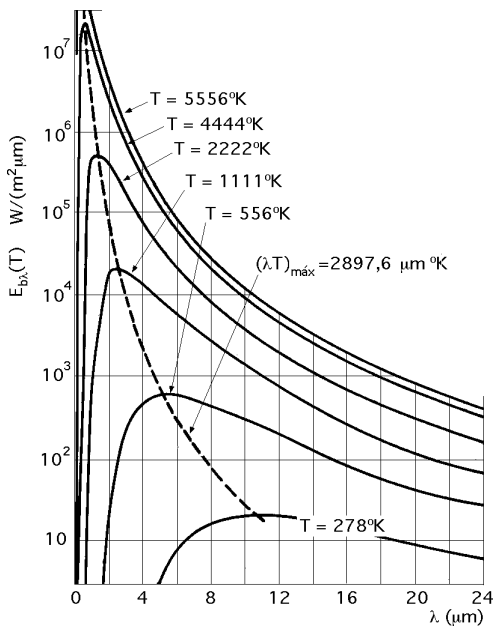


Fig XIX.1.- Poder emisor espectral del cuerpo negro y ley del desplazamiento de Wien

$$\frac{dE_b(T)}{dT} = \frac{d}{dT} \left\{ \frac{C_1}{C_2 \left(e^{\frac{C_2}{T}} - 1 \right)} \right\}_{T = \text{cte}} = 0$$

El resultado de esta operación es:

$$\lambda_{\text{máx}} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m}^\circ\text{K}$$

en la que $\lambda_{\text{máx}}$ es la longitud de onda correspondiente al máximo de potencia emisiva monocromática, de una superficie negra, a la temperatura T.

Esta ecuación expresa la ley del desplazamiento de Wien; el valor máximo de la potencia emisiva monocromática del cuerpo negro se puede obtener sustituyendo la ecuación del desplazamiento de Wien en la ecuación de la ley de Planck, resultando:

$$(E_b)_{\text{máx}} = 1,287 \cdot 10^{-5} T^5 \text{ W/m}^3$$

Para comprender los resultados de la ley del desplazamiento de Wien vamos a recurrir al siguiente ejemplo: *Supongamos que una corriente eléctrica pasa a través de un filamento haciendo aumentar su temperatura; a temperaturas relativamente bajas, por debajo de 600°C, la longitud de onda correspondiente al máximo de potencia emisiva del filamento es de unos $3,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $3,2 \text{ } \mu\text{m}$ ó 32000 \AA en la región del infrarrojo; se puede apreciar que el filamento emite energía radiante con solo acercar la mano, pero nuestros ojos son incapaces de detectar radiación visible, pues sólo una cantidad insignificante de energía corresponde al intervalo de longitudes de onda del espectro visible; si la temperatura del filamento sigue creciendo, la cantidad de energía radiante aumenta y una mayor parte de ella se emite a longitudes de onda más cortas. Por encima de 700°C, una pequeña cantidad de la energía se encuentra comprendida en el intervalo de longitudes de onda largas (extremo rojo del espectro visible); nuestros ojos pueden detectar ya esta radiación, apareciendo el filamento de un color rojo oscuro. Si la temperatura se incrementa todavía más, una mayor parte de la energía cae en la región visible del espectro y por encima de los 1.300°C se incluyen todas las longitudes de onda visibles de modo que el filamento aparece al rojo blanco.*

Un ejemplo de fuente energética a alta temperatura es el Sol; su superficie exterior posee una temperatura del orden de 5.800°K; de acuerdo con la ley de Wien el valor de $\lambda_{\text{máx}}$ a esta temperatura es de $5,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, ó $0,52 \text{ } \mu\text{m}$, próximo al centro de la región visible.

El ojo humano no responde a la energía radiante fuera del intervalo visible, y sólo puede predecir el comportamiento superficial en un intervalo de longitudes de onda muy restringido; existen algunas superficies que se comportan como buenos absorbentes en el intervalo visible y, por tanto, aparecen de color oscuro a nuestros ojos; en cambio, su comportamiento puede modificarse en la zona del infrarrojo y ser aquí malos absorbentes. Por el contrario, existen superficies que son pobres absorbentes de radiación en el intervalo correspondiente al espectro visible y aparecen blancas a nuestra vista, mientras que son unos absorbentes excelentes a longitudes de onda fuera del intervalo del espectro visible. Un objeto se considera *cuerpo cuasiblanco* cuando refleja casi todas las radiaciones del espectro visible sin absorber prácticamente ninguna; un cuerpo negro absorbería todas las radiaciones del espectro visible y no reflejaría ninguna.

LEY DE STEFAN-BOLTZMAN.- La cantidad total de energía radiativa que por unidad de área emite una superficie a la temperatura absoluta T y a todas las longitudes de onda, se denomina poder emisivo total. Si la superficie corresponde a un cuerpo negro, el poder emisivo total viene dado por la integral de la distribución de Planck para todas las longitudes de onda:

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} E_b(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)} d\lambda = \sigma T^4$$

este resultado se conoce como ley de Stefan-Boltzman, siendo σ su constante de valor:

$$\sigma = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^4 \frac{C_1}{15} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

mientras que C_1 y C_2 son las constantes de la ley de Planck, viniendo medida E_b en unidades de flujo térmico W/m^2 .

Como el valor de σ es muy pequeño, los efectos de la radiación a bajas temperaturas suelen ser despreciables; a la temperatura ambiente, del orden de $300^\circ K$, la potencia emisiva total de un cuerpo negro es aproximadamente de $460 W/m^2$, que es del orden de la décima parte del flujo de calor transferido desde una superficie a un fluido por convección, cuando el coeficiente de transmisión convectiva del calor y la diferencia de temperatura toman unos valores bajos, del orden de $100 W/m^2 \cdot K$ y $50^\circ K$, respectivamente. Por ello, a temperaturas bajas es justificable, en la mayoría de los casos, el despreciar los efectos radiativos. Sin embargo, su importancia es grande a altas temperaturas, ya que la potencia emisiva crece con la cuarta potencia de la temperatura absoluta.

FUNCIONES DE RADIACIÓN.- Si el poder emisivo monocromático del cuerpo negro dado por la ley de Planck, se integra para todo el intervalo de longitudes de onda desde ($\lambda = 0$) hasta ($\lambda = \infty$) el resultado es la energía radiativa total emitida por el cuerpo negro a la temperatura T entre las longitudes de onda λ_0 y λ_1 .

Al realizar la integración se demuestra que el resultado es sólo función del producto ($\lambda_1 T$):

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} E_b(\lambda, T) d\lambda = E_b(\lambda_0, \lambda_1 T)$$

Para determinar la cantidad total de energía radiativa emitida entre las longitudes de onda λ_1 y λ_2 para una superficie negra a la temperatura T basta con hallar la diferencia entre las integrales:

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_2} E_b(\lambda, T) d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} E_b(\lambda, T) d\lambda = E_b(\lambda_0, \lambda_2 T) - E_b(\lambda_0, \lambda_1 T)$$

Si se quiere conocer el tanto por ciento de la energía total del cuerpo negro emitida en todo el espectro, que se corresponda, por ejemplo, con un intervalo de longitudes de onda ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) se divide la ecuación anterior por:

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} E_b(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4$$

Tabla XIX.1.- Funciones de radiación del cuerpo negro

T	$\frac{E_b(0, T)}{T^4}$	T	$\frac{E_b(0, T)}{T^4}$	T	$\frac{E_b(0, T)}{T^4}$
0,2	3,41796e-26	4,2	0,516046	8,5	0,874666
0,4	1,86468e-12	4,4	0,548830	9,0	0,890090
0,6	9,29299e-8	4,6	0,579316	9,5	0,903147
0,8	0,0000164351	4,8	0,607597	10,0	0,914263
1,0	0,00032078	5,0	0,633786	10,5	0,923775
1,2	0,00213431	5,2	0,658011	11,0	0,931956
1,4	0,00779084	5,4	0,680402	11,5	0,939027
1,6	0,0197204	5,6	0,701090	12,0	0,945167
1,8	0,0393449	5,8	0,720203	13,0	0,955210
2,0	0,0667347	6,0	0,737864	14,0	0,962970
2,2	0,100897	6,2	0,754187	15,0	0,969056
2,4	0,140268	6,4	0,769232	16,0	0,973890
2,6	0,183135	6,6	0,783248	18,0	0,980939
2,8	0,227908	6,8	0,796180	20,0	0,985683
3,0	0,273252	7,0	0,808160	25,0	0,992299
3,2	0,318124	7,2	0,819270	30,0	0,995427
3,4	0,361760	7,4	0,829580	40,0	0,998057
3,6	0,403633	7,6	0,839157	50,0	0,999045
3,8	0,443411	7,8	0,848060	75,0	0,999807
4,0	0,480907	8,0	0,856344	100,0	1

por lo que: *El porcentaje de la energía radiativa del cuerpo negro correspondiente al intervalo de longitudes de onda ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) es igual a:*

$$\frac{E_b(0, 2T) - E_b(0, 1T)}{T^4}$$

en la que los valores de la expresión $\frac{E_b(0, T)}{T^4}$ están recogidos en la Tabla XVIII.1, en función del producto (T) en unidades SI; se conocen como Funciones de Radiación.

XIX.3.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR RADIACIÓN

La energía transmitida en forma de calor se hace mediante ondas electromagnéticas a la velocidad de la luz; la energía que abandona una superficie en forma de calor, por radiación, depende de su temperatura absoluta y de la naturaleza de la superficie. Un radiador perfecto o cuerpo negro, emite un flujo de energía por radiación a través de su superficie, dada por la ecuación:

$$q_r = A T^4 = A E_b$$

siendo: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$, la constante de Stefan -Boltzman

A el área superficial en m^2

T es la temperatura superficial en $^\circ\text{K}$

Esta ecuación dice que *cualquier superficie irradia calor proporcionalmente a la cuarta potencia de su temperatura absoluta*; aunque la emisión es independiente del medio exterior, la medida de la energía radiante requiere de una temperatura de referencia, como puede ser la de otro sistema que reciba la energía

transferida, y así poder obtener a partir de esta referencia la transferencia neta de energía radiante.

Si un *cuerpo negro* A_1 irradia a un recinto A_2 que le rodea completamente, y que se puede considerar como una superficie negra, la transferencia neta de energía radiante, viene dada por:

$$q_r = A_1 (T_1^4 - T_2^4) = A_1 (E_{b1} - E_{b2})$$

siendo A_1 el área superficial del cuerpo negro emisor, T_1 la temperatura del cuerpo negro emisor y T_2 la temperatura del recinto, ambas en °K.

Si un cuerpo negro A_1 irradia a otro cuerpo negro A_2 , la transferencia neta de energía radiante viene dada por:

$$q_r = A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

en la que F_{1-2} se conoce como *factor de forma* o factor de visión, que modifica la ecuación de los radiadores perfectos teniendo en cuenta las geometrías relativas de los cuerpos.

Los cuerpos reales no cumplen las especificaciones de un radiador ideal, sino que emiten radiación a un ritmo inferior al de los cuerpos negros. Si a una temperatura igual a la de un cuerpo negro emiten una fracción constante de la emisión correspondiente a un cuerpo negro, para cada longitud de onda, se denominan cuerpos grises.

Un *cuerpo gris* emite radiación según la expresión:

$$q_r = A_1 \epsilon_1 T_1^4$$

La energía radiante neta transferida a la temperatura T_1 a un cuerpo negro que lo rodea, (medio exterior), a la temperatura T_2 es:

$$q_r = A_1 \epsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

en la que el subíndice 1 se corresponde con el cuerpo gris, siendo ϵ_1 la emitancia del mismo, igual a la relación entre la emisión de la superficie gris y la emisión de un radiador perfecto a la misma temperatura.

Si ninguno de los dos cuerpos es un radiador perfecto, pero existe entre los mismos una determinada relación geométrica, la energía radiante neta transferida entre ellos viene dado por:

$$q_r = A_1 F_{12}^* (E_{b1} - E_{b2}) = A_1 F_{12}^* (T_1^4 - T_2^4)$$

en la que F_{12}^* es un factor de forma complejo que depende de las emisividades y de las geometrías relativas a los cuerpos.

XIX.4.- FACTOR DE FORMA DE LA RADIACIÓN

La transferencia de calor por radiación entre dos superficies cualquiera, se calcula determinando el factor de forma F_{12} como la fracción de energía radiante total que abandona la superficie A_1 , (q_1 semiesfera) y llega directamente a una segunda superficie A_2 , ($q_1 \rightarrow 2$).

FACTOR DE FORMA $dF_{dA_1 \rightarrow dA_2}$ ENTRE DOS SUPERFICIES INFINITESIMALES dA_1 y dA_2 .

Para deducir una expresión del factor de forma $dF_{dA_1 \rightarrow dA_2}$:

$$dF_{dA_1 \rightarrow dA_2} = \frac{dq_{dA_1 \rightarrow dA_2}}{dq_{dA_1 \text{ semiesfera}}}$$

se puede partir de la Fig XIX.2, en la que dA_1 es la superficie emisora, dA_2 es la superficie receptora y dw_{12} el ángulo sólido subtendido por el área dA_2 desde dA_1 .

La energía radiante $dq_{dA_1 \rightarrow dA_2}$ que se emite desde dA_1 y alcanza dA_2 , viene dada por:

$$dq_{dA_1 \rightarrow dA_2} = dA_1 I_1 \cos \theta_1 dw_{12} = \left| \frac{dw_{12}}{1^2} = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2} \right| = \frac{I_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{r^2} dA_1$$

siendo: $I_1 \cos \theta_1$, la intensidad de la radiación contenida en el ángulo sólido dw
 r , la distancia entre las dos superficies dA_1 y dA_2

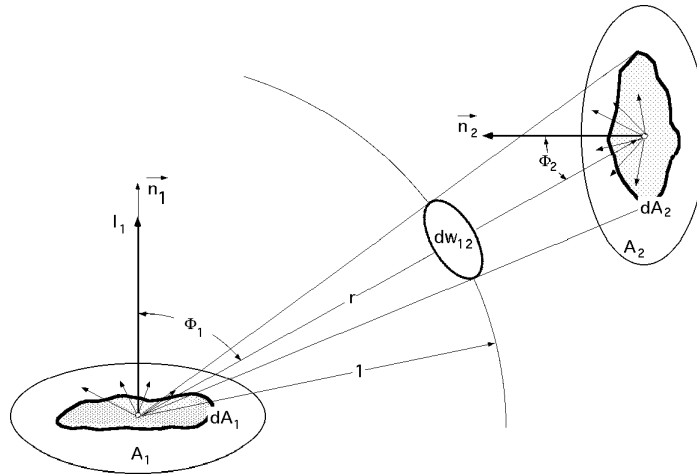


Fig XIX.2.- Nomenclatura para el cálculo de la intensidad de la radiación

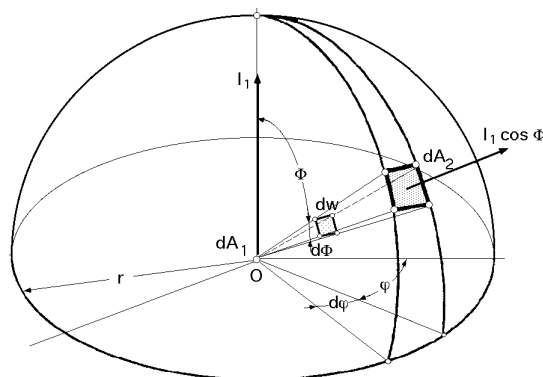


Fig XIX.3.- Nomenclatura para la definición del ángulo sólido dw en términos de ϕ y ψ .

Si se supone que la superficie emisora es difusa, la intensidad de la radiación emitida por dA_1 es independiente de la dirección, y los factores de forma son función, únicamente, de la geometría y no de la intensidad de la radiación.

El flujo total que abandona dA_1 y que incide sobre una semiesfera que contenga a dA_2 y cuyo centro sea O en dA_1 , se calcula a partir del ángulo sólido definido según la Fig XIX.3, en la forma:

$$dq_{dA_1 \text{ semiesfera}} = E_{b1} dA_1$$

El poder emisivo E_{b1} del cuerpo negro emitido por unidad de superficie, es:

$$E_{b1} = I_1 \cos \theta \quad dw = \left| dw = \frac{dA_2}{r^2} = \frac{(r \sin \theta) (r d\theta \sin \theta)}{r^2} = \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right| =$$

$$= I_1 \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi = I_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi = I_1$$

Una superficie i se puede considerar como superficie elemental si se cumple que: $\frac{dA_i}{r^2} \ll 1$

El flujo total emitido por dA_1 es:

$$dq_{dA_1 \text{ semiesfera}} = E_{b1} dA_1 = I_1 dA_1$$

El factor de forma de la radiación $dF_{dA_1 \rightarrow dA_2}$ o factor de visión elemental, entre dos superficies elementales dA_1 y dA_2 es, por definición, el cociente entre lo que recibe dA_2 y lo que emite dA_1 :

$$dF_{dA_1 \rightarrow dA_2} = \frac{dq_{dA_1 \rightarrow dA_2}}{dq_{dA_1 \text{ semiesfera}}} = \frac{I_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \frac{dA_1 dA_2}{r^2}}{I_1 dA_1} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{r^2}$$

En la misma forma se puede poner:

$$dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} = \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1 dA_1}{r^2}$$

y dividiéndolas miembro a miembro resulta:

$$dF_{dA_1 \rightarrow dA_2} dA_1 = dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} dA_2$$

que se conoce como *regla de la reciprocidad*.

FACTOR DE FORMA PARA UNA SUPERFICIE FINITA Y OTRA INFINITESIMAL- Muy pocas veces se determina el intercambio radiativo entre dos superficies infinitesimales; sin embargo, sí es bastante usual el intercambio entre una superficie muy pequeña dA_1 frente a una muy grande A_2 ; el factor de forma es:

$$F_{dA_1 \rightarrow A_2} = F_{dA_1 \rightarrow dA_2} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{r^2}$$

Por otro lado, si q_2 es el flujo térmico que sale de la superficie A_2 , la fracción de esta energía radiante que llega a dA_1 , y el factor de forma correspondiente, son:

$$q_2 A_2 F_{A_2 \rightarrow dA_1} = q_2 \int_{A_2} dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} dA_2 \quad F_{A_2 \rightarrow dA_1} = \frac{q_2 \int_{A_2} dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} dA_2}{q_2 A_2} =$$

$$= \frac{1}{A_2} \int_{A_2} dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} dA_2 = \frac{dA_1}{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{r^2}$$

Dividiendo los factores de forma miembro a miembro se encuentra:

$$\frac{F_{dA_1 \rightarrow A_2}}{F_{A_2 \rightarrow dA_1}} = \frac{A_2}{dA_1} \quad dA_1 F_{dA_1 \rightarrow A_2} = A_2 F_{A_2 \rightarrow dA_1}$$

FACTOR DE FORMA PARA DOS SUPERFICIES FINITAS.- Si a continuación se considera que las dos superficies A_1 y A_2 son finitas y que el flujo térmico q_1 que sale de la superficie A_1 es uniforme en toda la superficie, la energía radiante ($q_1 A_1$) que sale de A_1 y llega directamente a A_2 es:

$$q_1 A_1 F_{A_1 \rightarrow A_2} = q_1 \int_{A_1} dF_{dA_1 \rightarrow A_2} \quad F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{q_1 \int_{A_1} dF_{dA_1 \rightarrow A_2}}{q_1 A_1} =$$

$$= \frac{\int_{A_1} dF_{dA_1 \rightarrow A_2}}{A_1} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{r^2}$$

expresión del factor de forma restringida a superficies emisoras difusas.

Si los subíndices A_1 y A_2 se intercambian, de forma que la superficie emisora sea la A_2 y la receptora la A_1 , se tiene:

$$F_{A_2 \rightarrow A_1} = \frac{q_2 \int_{A_2} dF_{dA_2 \rightarrow A_1}}{q_2 A_2} = \frac{\int_{A_2} dF_{dA_2 \rightarrow A_1}}{A_2} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1 dA_2 dA_1}{r^2}$$

Dividiéndolas miembro a miembro resulta:

$$A_1 F_{A_1 \rightarrow A_2} = A_2 F_{A_2 \rightarrow A_1} \quad ; \quad A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

Para dos superficies genéricas A_i y A_j se tiene: $A_i F_{i \rightarrow j} = A_j F_{j \rightarrow i}$

PROPIEDADES DE LOS FACTORES DE FORMA.- Si las superficies forman un recinto, (por ejemplo 3 superficies), la energía emitida por la superficie A_1 tiene que incidir directamente sobre cada una de las tres superficies que conforman el recinto, es decir:

$$E_{\text{emitida superf (1)}} = E_{\text{que llega a la superf (1)}} + E_{\text{que llega a la superf (2)}} + E_{\text{que llega a la superf (3)}}$$

y dividiéndolas por el primer miembro de la ecuación, y teniendo en cuenta que la definición del factor de forma F es:

$$F = \frac{\text{Energía interceptada}}{\text{Energía emitida}}$$

se encuentra que: $1 = F_{11} + F_{12} + F_{13}$, que se conoce como **relación del recinto o de la sumatoria**.

Para n superficies que conforman el recinto se tiene: $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$, con: $i = 1, 2, \dots, n$

El factor F_{ii} se tiene que incluir en el recinto siempre que la superficie A_i sea cóncava, ya que ésta se puede ver a sí misma y, por lo tanto, una fracción de la energía que emite incidirá sobre alguna parte de ella.

Para superficies planas o convexas: $F_{i-i} = 0$

Se han evaluado los factores de forma de radiación para muchas superficies que aparecen en ingeniería, cuya casuística se presenta en forma gráfica al final del capítulo. Las reglas anteriores de reciprocidad y de la sumatoria son útiles porque proporcionan relaciones simples que permiten evaluar los factores de forma de un recinto, si se conocen los demás; para determinar todos los factores de forma posibles de un recinto, no se necesita calcular cada uno de ellos directamente, sino que se deben utilizar siempre las relaciones de reciprocidad y sumatoria.

Si representamos todos los factores de forma posibles de un recinto de n superficies mediante la matriz:

$$F_{i-j} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \dots & F_{2n} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \dots & F_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & F_{n3} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix}$$

se observa que si el recinto tiene n superficies, hay que determinar n^2 factores de forma.

La regla de la reciprocidad proporciona las siguientes relaciones adicionales: $\frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$

La regla de la sumatoria proporciona otras n relaciones adicionales.

El número total de factores de forma que se deben calcular para un recinto de n superficies es:

$$n^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2!} + n \right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Si las superficies son convexas o planas, desaparecerán n factores de forma de una superficie con respecto a sí misma, por lo que el número total de factores de visión que se deben calcular es:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

XIX.5.- ÁLGEBRA DE FACTORES DE FORMA

Los diagramas de factores de forma se pueden utilizar para la determinación de valores en geometrías de orden superior utilizando un método denominado álgebra de factores de forma. La distribución geométrica se descompone por medio del principio de la adición y sustracción aritmética de los factores de visión en distribuciones más sencillas para las que ya existen diagramas y ábacos del factor de forma.

a) Se desea evaluar el factor de forma F_{12} de la composición representada en la Fig XIX.5; como el álgebra de factores de forma es un simple enunciado del Primer Principio de la Termodinámica, implica que la energía que abandona la superficie A_1 y llega a A_3 tiene que ser igual a la suma de las que llegan a A_a y A_2 .

Al ser ($A_3 = A_a + A_2$) la conservación de la energía requiere que:

$$A_1 F_{13} = A_1 F_{1a} + A_1 F_{12} \quad ; \quad F_{13} = F_{1a} + F_{12} \quad ; \quad F_{12} = F_{13} - F_{1a}$$

en la que F_{13} y F_{1a} vienen tabulados y por lo tanto F_{12} se puede determinar fácilmente.

Aplicando la recíproca se tiene:

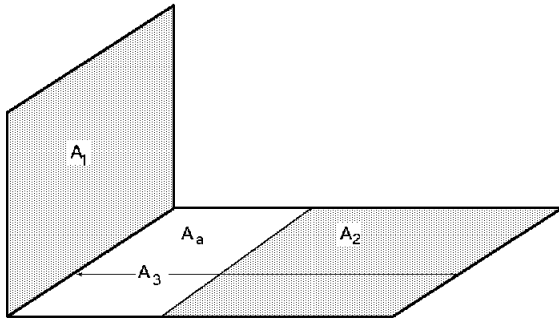


Fig XIX.5

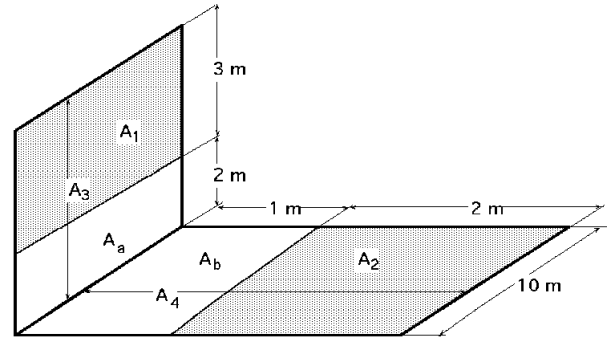


Fig XIX.6

$$A_3 F_{31} = A_a F_{a1} + A_2 F_{21} = A_1 F_{13} \quad ; \quad F_{21} = F_{31} \frac{A_3}{A_2} - F_{a1} \frac{A_a}{A_2}$$

b) Para evaluar el factor de forma F_{12} para la geometría de la Fig XIX.6, en la que las superficies son:

$$A_3 = A_1 + A_a \quad ; \quad A_4 = A_b + A_2$$

aplicando lo anteriormente expuesto resulta:

$$A_3 F_{34} = A_a F_{ab} + A_a F_{a2} + A_1 F_{1b} + A_1 F_{12}$$

F_{34} y F_{ab} se calculan mediante las gráficas indicadas anteriormente:

$$A_3 F_{3b} = A_a F_{ab} + A_1 F_{1b} \quad ; \quad F_{1b} = \frac{A_3}{A_1} F_{3b} - \frac{A_a}{A_1} F_{ab}$$

$$A_a F_{a4} = A_a F_{ab} + A_a F_{a2} \quad ; \quad F_{a2} = F_{a4} - F_{ab}$$

Combinando estas tres ecuaciones y despejando F_{12} se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{1}{A_1} (A_3 F_{34} - A_a F_{ab} - A_a F_{a2} - A_1 F_{1b}) = \\ &= \frac{1}{A_1} (A_3 F_{34} - A_3 F_{3b} - A_a F_{a2}) = \frac{1}{A_1} (A_3 F_{34} - A_3 F_{3b} - A_a F_{a4} + A_a F_{ab}) \end{aligned}$$

Con los datos numéricos de la Fig XIX.6 los valores de estos factores de forma, son:

$$F_{34} = 0,19 \quad ; \quad F_{a4} = 0,32 \quad ; \quad F_{3b} = 0,08 \quad ; \quad F_{ab} = 0,18$$

$$F_{12} = \frac{(50 \times 0,19) - (50 \times 0,08) - (20 \times 0,32) + (20 \times 0,18)}{30} = 0,097$$

y el 9,7% de la energía difusa que deja la superficie A_1 incide directamente sobre la superficie A_2 .

c) Como la reciprocidad relaciona áreas y factores de visión entre dos superficies que intercambian radiación, vamos a considerar el ejemplo de la Fig XIX.7, en la que se han dibujado cuatro rectángulos de superficie A_1 , A_2 , A_3 y A_4 .

En base a la reciprocidad se tiene:

$$A_1 F_{1-4} = A_4 F_{4-1} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_4 dA_1 dA_4}{r^2} = \frac{b}{a} \frac{d}{a+c} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_4}{r^2} dx dy dz$$

$$A_3 F_{3-2} = A_2 F_{2-3} = \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_3 dA_2 dA_3}{r'^2} = \frac{d}{a} \frac{b}{a+c} \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_3}{r'^2} dx dy dz$$

Se observa que los límites de integración en ambos casos son iguales, por lo que existirán pares de elementos en ambas configuraciones con los mismos valores de r, r' y de ángulos θ , de lo que se deduce:

$$A_1 F_{1-4} = A_2 F_{2-3} = A_3 F_{3-2} = A_4 F_{4-1}$$

y como:

$$(A_3 + A_4) F_{(3,4)-(1,2)} = A_3 F_{3-1} + A_3 F_{3-2} + A_4 F_{4-1} + A_4 F_{4-2} = A_3 F_{3-1} + 2 A_4 F_{4-1} + A_4 F_{4-2}$$

$$F_{4-1} = \frac{(A_3 + A_4) F_{(3,4)-(1,2)} - A_3 F_{3-1} - A_4 F_{4-2}}{2 A_4}$$

y el factor de visión entre los rectángulos A_1 y A_4 se puede calcular en función de los factores de visión propios de rectángulos perpendiculares con un lado común.

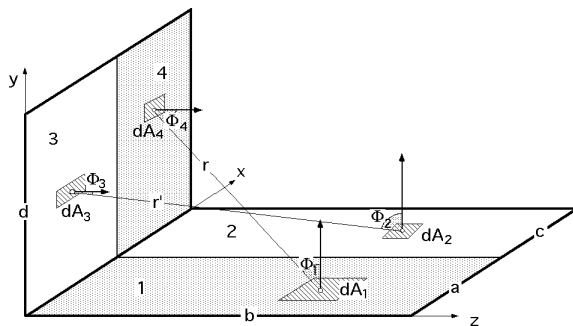


Fig XIX.7

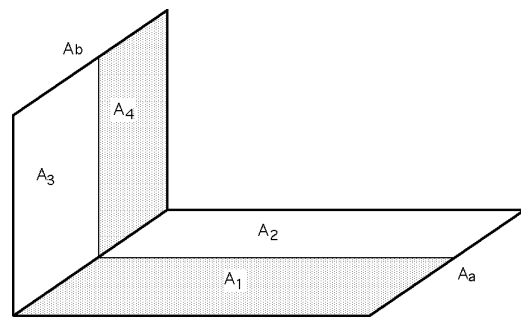


Fig XIX.8

Para evaluar el factor de forma F_{14} en la configuración (A_1, A_4) que se muestra en la Fig XIX.8, se definen las áreas imaginarias A_2 y A_3 , pudiéndose poner:

$$A_1 F_{14} = A_a F_{ab} - A_1 F_{13} - A_2 F_{24} - A_2 F_{23}$$

El factor de forma F_{23} es desconocido, observándose es de una configuración similar a la del F_{14} ; como sabemos que $(A_1 F_{14} = A_2 F_{23})$ se obtiene F_{14} en la forma:

$$F_{14} = \frac{A_a F_{ab} - A_1 F_{13} - A_2 F_{24}}{2 A_1}$$

en la que sólo intervienen factores de forma del tipo de los encontrados en la Fig XIX.5.

ELIMINACIÓN DE SUPERFICIES CÓNCAVAS.- La cara superior radiante A_1 de la Fig XIX.9 es cóncava, luego presenta con respecto a sí misma un factor de visión distinto de cero. Si sobre esta configuración inicial imaginamos una nueva superficie A_1^* resultante de la eliminación de concavidades de la

original, o lo que es lo mismo, formada por la superficie plana creada al tensor A_1 , superficie que no se ve a sí misma, se puede poner teniendo en cuenta la reciprocidad y la sumatoria:

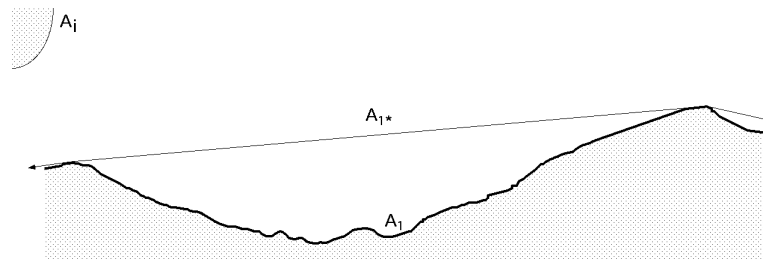


Fig XIX.9

$$A_1 F_{11^*} = A_{1^*} F_{1^*1} = \begin{cases} F_{1^*1} + F_{1^*1^*} = 1 \\ F_{1^*1^*} = 0 \end{cases} \quad F_{1^*1} = 1 \quad \left| = A_{1^*} \quad F_{11^*} = \frac{A_{1^*}}{A_1} \right.$$

$$F_{11} + F_{11^*} = 1 \quad F_{11} = 1 - F_{11^*} = 1 - \frac{A_{1^*}}{A_1}$$

La ecuación:

$$A_1 F_{11^*} = A_{1^*} \quad \text{Se multiplica por } E_{b1} \quad A_1 F_{11^*} E_{b1} = A_{1^*} E_{b1} = Q_r$$

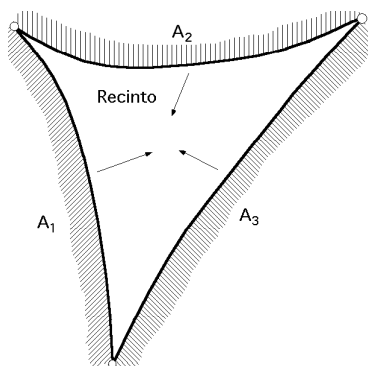
indica que la radiación emitida por una superficie cóncava equivale a la que emitiría la superficie mínima obtenida, al reemplazar las concavidades por superficies planas, supuestas a la misma temperatura. El hecho de sustituir el área cóncava A_1 por el área plana A_1^* no modifica los factores de visión del recinto respecto a otra superficie cualquiera i ; por lo tanto, los F_{ij} para todo $(i \neq 1)$ y $(j \neq 1)$, ó 1^* se mantienen igual antes y después de la sustitución de A_1 por A_1^* .

A su vez, para las superficies A_1 y A_i se tiene:

$$\sum_{i=1}^n F_{ij} = 1 \quad ; \quad \begin{cases} F_{1i} + F_{i1} = 1 \\ F_{ii} + F_{i1^*} = 1 \end{cases} \quad F_{i1} = F_{i1^*} \quad ; \quad A_i F_{i1} = A_i F_{i1^*} \quad \text{Recíproca} \quad A_1 F_{1i} = A_{1^*} F_{1^*i}$$

que indica que en el recinto, a efectos de cálculo, es válida la sustitución del área A_1 por su área plana A_1^* .

FACTORES DE FORMA PARA TRES SUPERFICIES CONVEXAS GENERADAS A LO LARGO DE UNA RECTA.- Vamos a considerar un recinto formado por tres superficies planas o convexas A_1, A_2 y A_3 , Fig XIX.10. Ninguna de las superficies tiene una curvatura positiva en la dirección de su radiación por lo que



sólo pueden verse desde cada una de las otras dos; por lo tanto se puede poner:

$$\begin{aligned} F_{12} + F_{13} &= 1 \quad ; \quad F_{11} = 0 \\ F_{21} + F_{23} &= 1 \quad ; \quad F_{22} = 0 \\ F_{31} + F_{32} &= 1 \quad ; \quad F_{33} = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por A_1 , la segunda por A_2 y la tercera por A_3 , y teniendo en cuenta las relaciones

Fig XIX.10.- Recinto de tres superficies convexas

recíprocas correspondientes, se reduce el número de incógnitas de 6 a 3, resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 A_1 F_{12} + A_1 F_{13} &= A_1 & ; & & A_1 F_{12} + A_1 F_{13} &= A_1 \\
 A_2 F_{21} + A_2 F_{23} &= A_2 & ; & & A_1 F_{12} + A_2 F_{23} &= A_2 \\
 A_3 F_{31} + A_3 F_{32} &= A_3 & ; & & A_1 F_{13} + A_2 F_{23} &= A_3
 \end{aligned}$$

de las que se obtienen los factores de forma:

$$F_{12} = \frac{A_1 + A_2 - A_3}{2 A_1} \quad ; \quad F_{13} = \frac{A_1 + A_3 - A_2}{2 A_1} \quad ; \quad F_{23} = \frac{A_2 + A_3 - A_1}{2 A_2}$$

MÉTODO DE LAS CUERDAS CRUZADAS.- Si se considera un recinto más complejo, cuya sección recta viene representada en la Fig XIX.11, y se desea determinar el intercambio de energía radiante entre las superficies A_1 y A_2 o lo que es lo mismo el producto $A_1 F_{12}$ se recurre a la siguiente construcción:

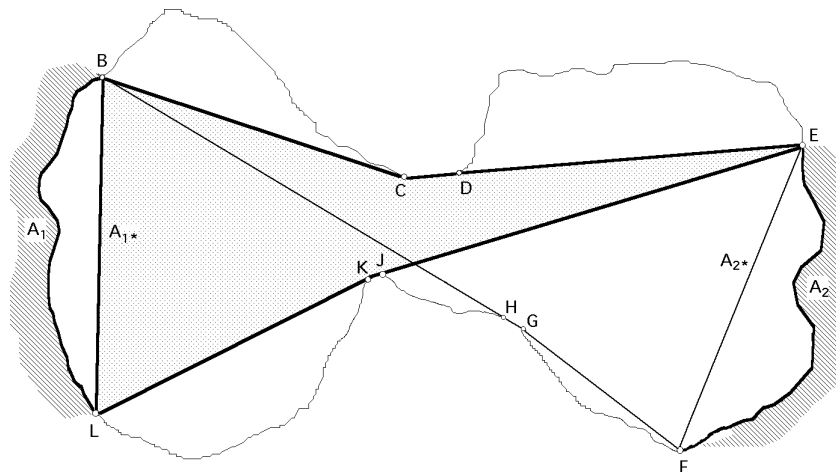


Fig XIX.11

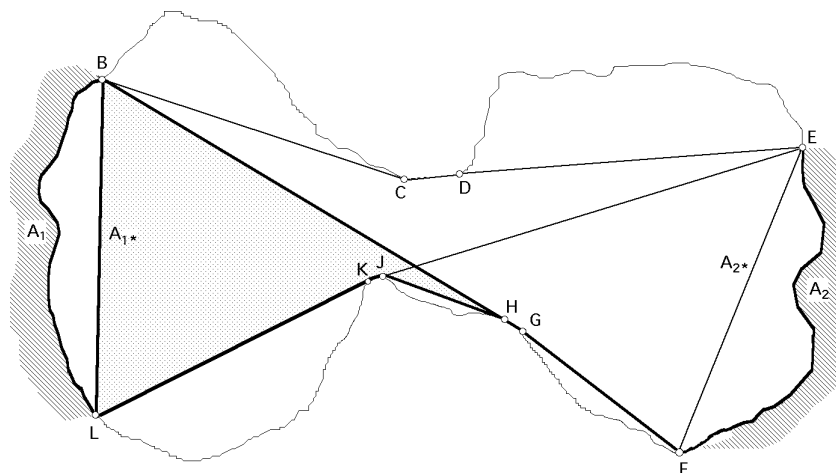


Fig XIX.12

Entre los bordes B y L de A_1 se tensa una cuerda que representa la sección del área efectiva A_{1*} ; a continuación se traza la línea de longitud mínima por el interior del recinto entre los bordes B de A_1 y E

de A_2 , dando lugar a la línea {BCDE}; haciendo lo mismo entre los bordes L de A_1 y F de A_2 se obtiene la línea {LKJHGF}.

El intercambio directo de energía radiante entre las superficies A_1 y A_2 es el mismo, prescindiendo de si ambas superficies están unidas por las líneas (BE) y (LF), o por las superficies primitivas, ya que ninguna de las partes que A_1 ve de A_2 , o a la inversa, están afectadas por esta situación. A continuación se trazan las líneas de longitud mínima entre B y F, línea {BHGF} y entre L y E, línea {LKJE}; si se considera un recinto formado por las tres superficies A_{1^*} , {BCDE} y {EJKL}, Fig XIX.12, y por analogía con el caso anterior se tiene:

$$A_{1^*} F_{1^*-(BCDE)} = \frac{A_{1^*} + (BCDE) - (LKJE)}{2}$$

en donde (BCDE) representa un área, que es el producto de la línea (BCDE) por la longitud de la generatriz (normal al plano del dibujo).

De igual forma, para el recinto formado por la superficie A_{1^*} , (BHGF) y (FGHJKL) se tiene:

$$A_{1^*} F_{1^*-(FGHJKL)} = \frac{A_{1^*} + (FGHJKL) - (BHGF)}{2}$$

De la Fig XIX.11 se deduce que desde A_{1^*} se pueden ver no sólo A_1 sino también (BCDE), (FGHJKL) y A_2 ; aplicando la propiedad de la sumatoria de los factores de forma:

$$\begin{aligned} F_{1^*-(BCDE)} + F_{1^*-(FGHJKL)} + F_{1^*-2} + F_{1^*-1^*} &= 1 & F_{1^*-(BCDE)} + F_{1^*-(FGHJKL)} + F_{1^*-2} &= 1 \\ F_{1^*-1} + F_{1^*-1^*} &= 1 ; F_{1^*-1^*} = 0 & F_{1^*-1} &= 1 \end{aligned}$$

Multiplicándola por A_{1^*} resulta:

$$A_{1^*} F_{1^*-(BCDE)} + A_{1^*} F_{1^*-(FGHJKL)} + A_{1^*} F_{1^*-2} = A_{1^*}$$

y teniendo en cuenta que: $A_{1^*} F_{1^*-2} = A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2}$, se obtiene:

$$A_{1^*} F_{1^*-(BCDE)} + A_{1^*} F_{1^*-(FGHJKL)} + A_1 F_{1-2} = A_{1^*}$$

$$\begin{aligned} A_1 F_{1-2} &= A_{1^*} - A_{1^*} F_{1^*-(BCDE)} - A_{1^*} F_{1^*-(FGHJKL)} = A_{1^*} - \frac{A_{1^*} + (BCDE) - (LKJE)}{2} - \frac{A_{1^*} + (FGHJKL) - (BHGF)}{2} = \\ &= \frac{(LKJE) - (BCDE)}{2} - \frac{(FGHJKL) - (BHGF)}{2} = \frac{\{(LKJE) + (BHGF)\} - \{(BCDE) + (FGHJKL)\}}{2} \end{aligned}$$

por lo que el producto A F para el intercambio radiativo entre superficies de este tipo, por unidad de longitud normal al plano del dibujo, es la suma de las longitudes de las dos cuerdas que se cruzan, tensadas entre los extremos que representan las superficies, menos la suma de las longitudes de las dos cuerdas que no se cruzan, tensadas asimismo entre las superficies, y todo ello dividido por dos, (*Hottel*).

Para el caso que se presenta en la Fig XIX.13 en el que se tienen dos superficies bidimensionales de extensión en una dirección, siendo todas las secciones transversales normales a la dirección infinita idénticas, se obtiene para valor de F_{12} :

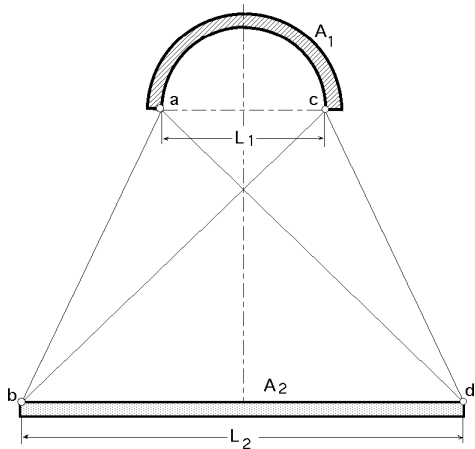


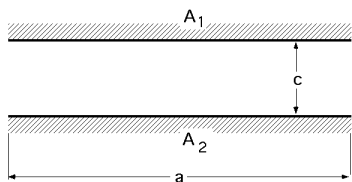
Fig XIX.13.- Método de las cuerdas cruzadas

$$F_{12} = \frac{(ad + cb) - (ab + cd)}{2 A_1}$$

es decir, el factor de forma F_{12} es igual a la suma de las longitudes de las cuerdas que se cruzan, extendidas entre los extremos de las dos superficies, menos la suma de las longitudes de las cuerdas no cruzadas, dividido por el doble de la longitud A_1 .

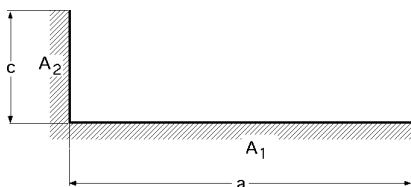
FACTORES DE FORMA DE RADIACIÓN (CONFIGURACIONES EN 2 DIMENSIONES)

1.- PLACAS PARALELAS DEL MISMO ANCHO



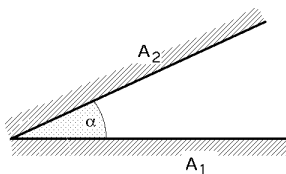
$$F_{A_1 A_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2} - \frac{c}{a}$$

2.- PLACAS CONTIGUAS LARGAS



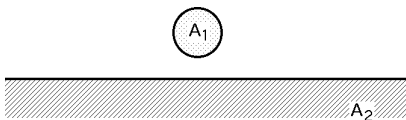
$$F_{A_1 A_2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{c}{a} - \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2} \right\}$$

3.- CUÑA SIMÉTRICA LARGA



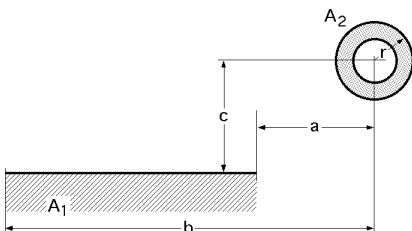
$$F_{A_1 A_2} = 1 - \frac{\sin \alpha}{2}$$

4.- CILINDRO LARGO PARALELO, O ESFERA, RESPECTO A UNA GRAN SUPERFICIE PLANA



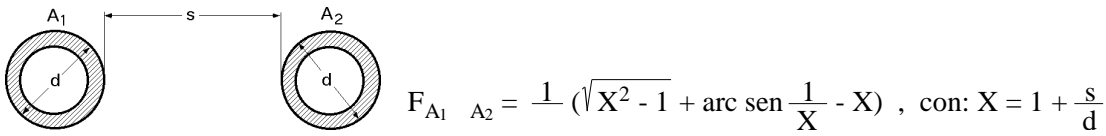
$$F_{A_1 A_2} = \frac{1}{2}$$

5.- CILINDRO LARGO PARALELO A UNA PLACA



$$F_{A_1 A_2} = \frac{r}{b-a} \left(\text{arc tg } \frac{b}{c} - \text{arc tg } \frac{a}{c} \right)$$

6.- CILINDROS ADYACENTES LARGOS Y PARALELOS DE DIÁMETROS IGUALES

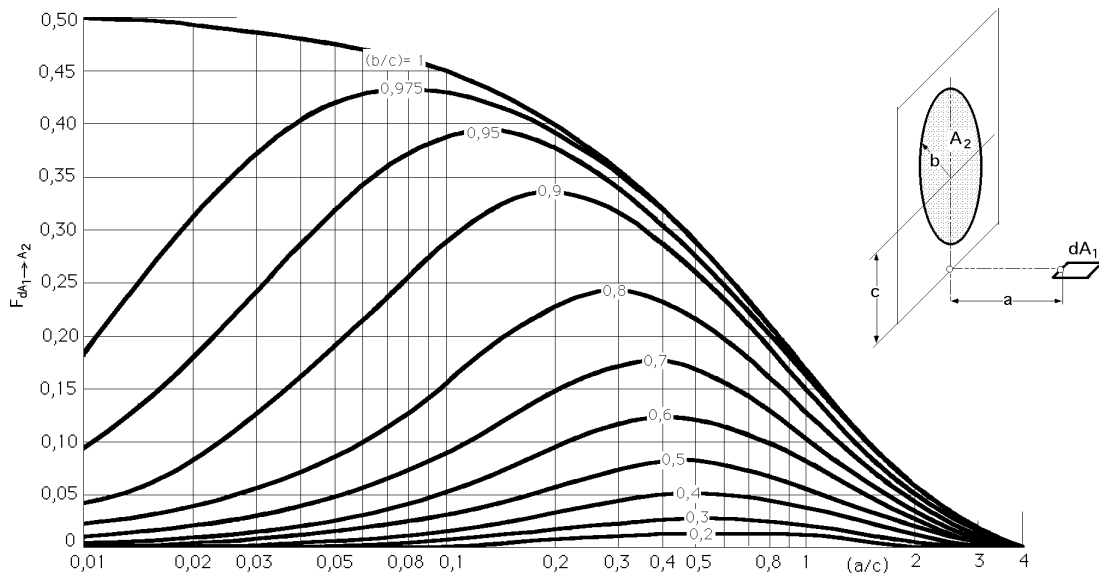


FACTORES DE FORMA DE RADIACIÓN (CONFIGURACIONES EN 3 DIMENSIONES)

1.- SUPERFICIE ELEMENTAL dA_1 Y DISCO PLANO A_2

El disco plano A_2 es perpendicular al plano que contiene a dA_1

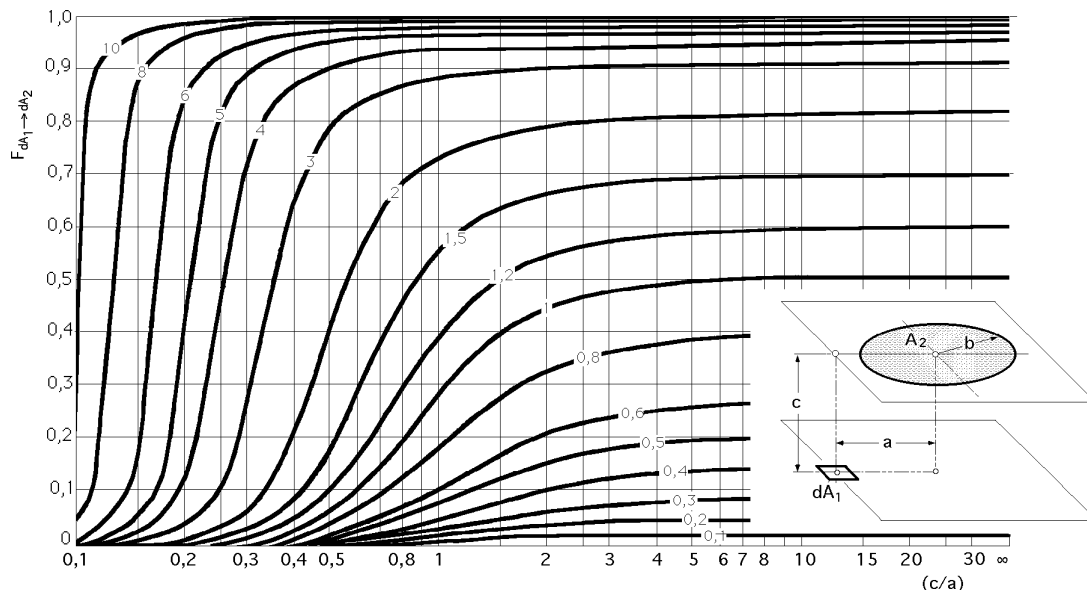
$X = \frac{a}{c}$; $Y = \frac{b}{c}$; $F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{X}{2} \left\{ \frac{1 + X^2 + Y^2}{\sqrt{(1 + X^2 + Y^2)^2 - 4 Y^2}} - 1 \right\}$



2.- SUPERFICIE ELEMENTAL dA_1 Y DISCO PLANO A_2

El disco plano A_2 es paralelo al plano que contiene a dA_1

$X = \frac{c}{a}$; $Y = \frac{b}{c}$; $Z = 1 + (1 + Y^2) X^2$; $F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{Z - 2 X^2 Y^2}{\sqrt{Z^2 - 4 Y^2 X^2}} \right\}$

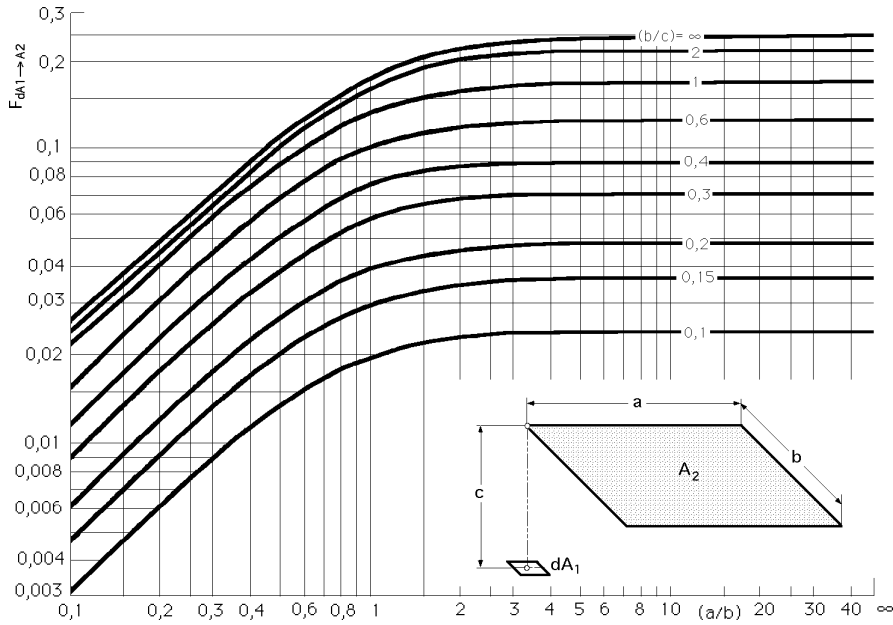


3.- SUPERFICIE ELEMENTAL dA_1 PARALELA A UN RECTÁNGULO A_2

Uno de los ángulos del rectángulo A_2 se encuentra en la normal a dA_1

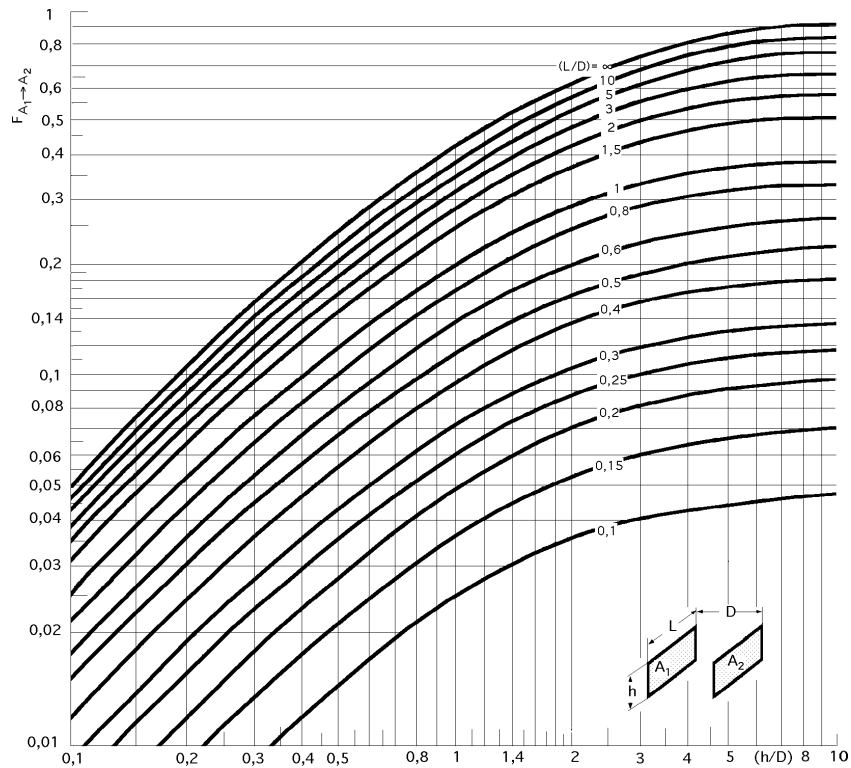
$$X = \frac{a}{c} \quad ; \quad Y = \frac{b}{c} \quad ; \quad F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{X}{\sqrt{1+X^2}} \arctan \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} + \frac{Y}{\sqrt{1+Y^2}} \arctan \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} \right\}$$

$$F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} \arcsen \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} \arcsen \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right\}$$



4- DOS RECTÁNGULOS IGUALES Y PARALELOS, $X = \frac{L}{D}$, $Y = \frac{h}{D}$

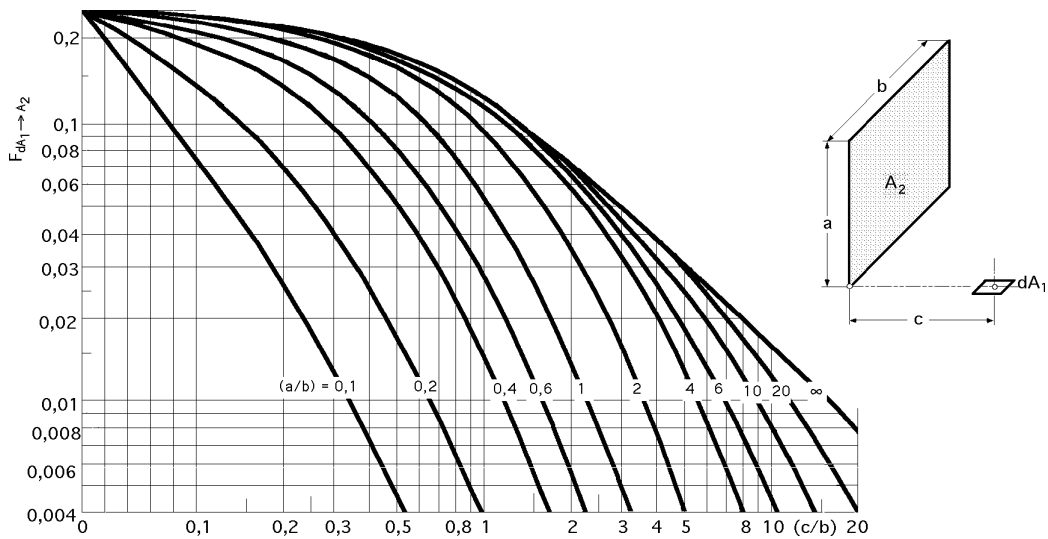
$$F_{A_1 \rightarrow A_2} \left(\frac{XY}{2} \right) = \ln \sqrt{\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2}} + Y \sqrt{1+X^2} \arctan \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} + X \sqrt{1+Y^2} \arctan \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} - Y \arctan Y - X \arctan X$$



5.- SUPERFICIE ELEMENTAL dA_1 PERPENDICULAR A UN RECTÁNGULO A_2

Uno de los ángulos del rectángulo A_2 se encuentra en línea con dA_1

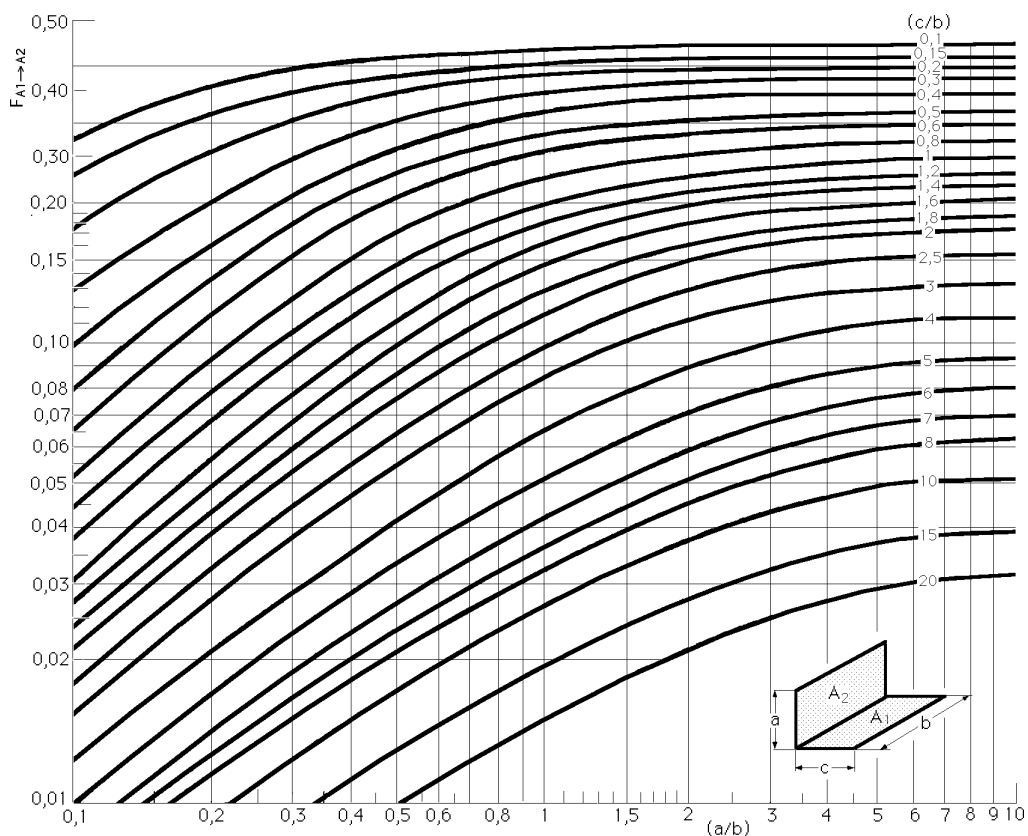
$$X = \frac{a}{b} ; Y = \frac{c}{b} ; A = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} ; F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ \arctan \frac{1}{Y} - A Y \arctan A \right\}$$



6.- DOS RECTÁNGULOS CON UNA ARISTA COMÚN FORMANDO UN ANGULO DE 90°

$$X = \frac{a}{b} ; Y = \frac{c}{b} ; X^2 + Y^2 = Z^2$$

$$(Y) F_{A_1 \rightarrow A_2} = X \arctan \frac{1}{X} + Y \arctan \frac{1}{Y} - Z \arctan \frac{1}{Z} + \frac{1}{4} \ln \left[\frac{(1 + X^2)(1 + Y^2)}{1 + Z^2} \left\{ \frac{X^2(1 + Z^2)}{Z^2(1 + X^2)} \right\}^{X^2} \left\{ \frac{Y^2(1 + Z^2)}{Z^2(1 + Y^2)} \right\}^{Y^2} \right]$$



7.- DOS RECTÁNGULOS CON UNA ARISTA COMÚN FORMANDO UN ANGULO Φ

$$X = \frac{a}{b} ; Y = \frac{c}{b} ; Z = X^2 + Y^2 - 2XY \cos \Phi$$

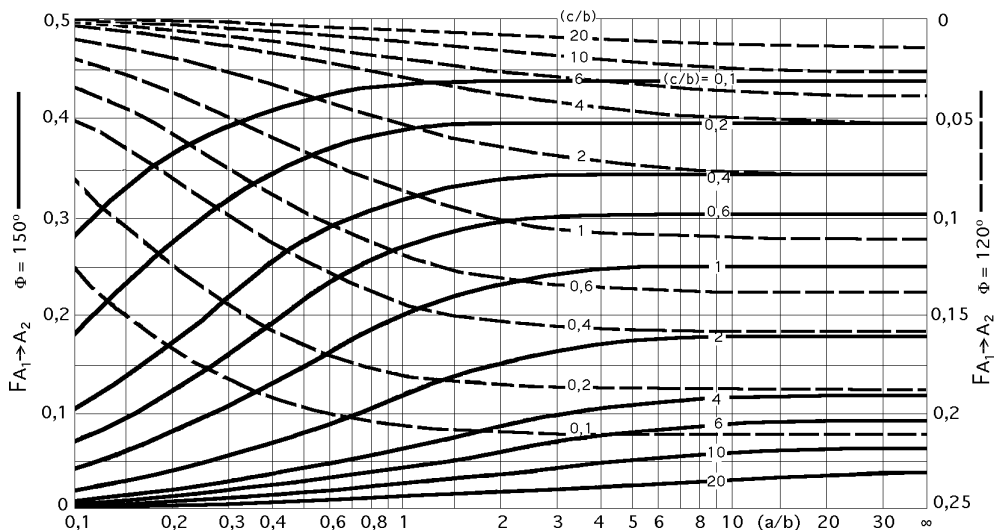
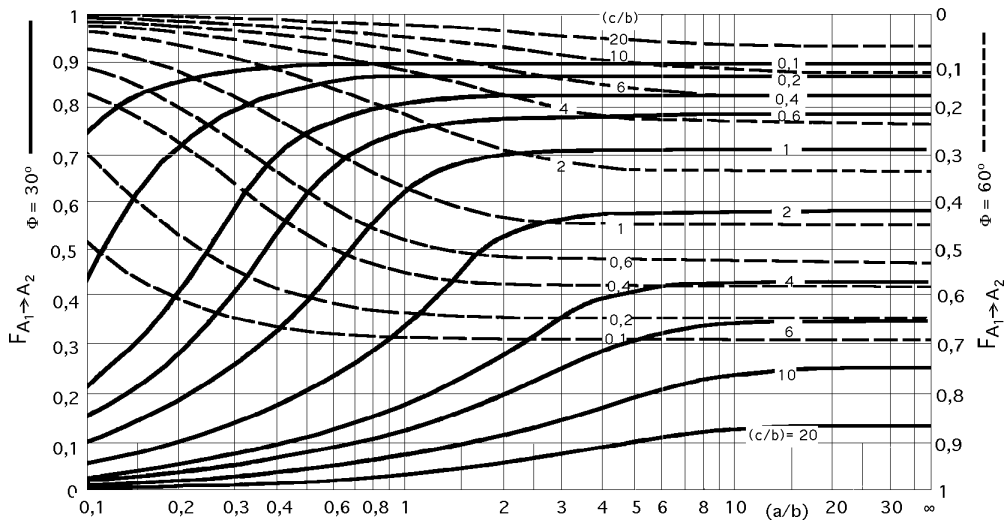
$$F_{A_1 \rightarrow A_2}(\Phi) = -\frac{\sin 2\Phi}{4} \left\{ XY \sin \Phi - \left(\frac{1}{2} - \cos \Phi\right) (X^2 + Y^2) + Y^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{X - Y \cos \Phi}{Y \sin \Phi} + X^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{Y - X \cos \Phi}{X \sin \Phi} \right\} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \Phi}{4}\right) \ln \frac{(1 + X^2)(1 + Y^2)}{1 + Z} + Y^2 \ln \frac{Y^2(1 + Z)}{Z(1 + Y^2)} + X^2 \ln \frac{X^2(1 + X^2) \cos^2 \Phi}{Z(1 + Z) \cos 2\Phi} +$$

$$+ X \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{X} + Y \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{Y} - \sqrt{Z} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{Z}} +$$

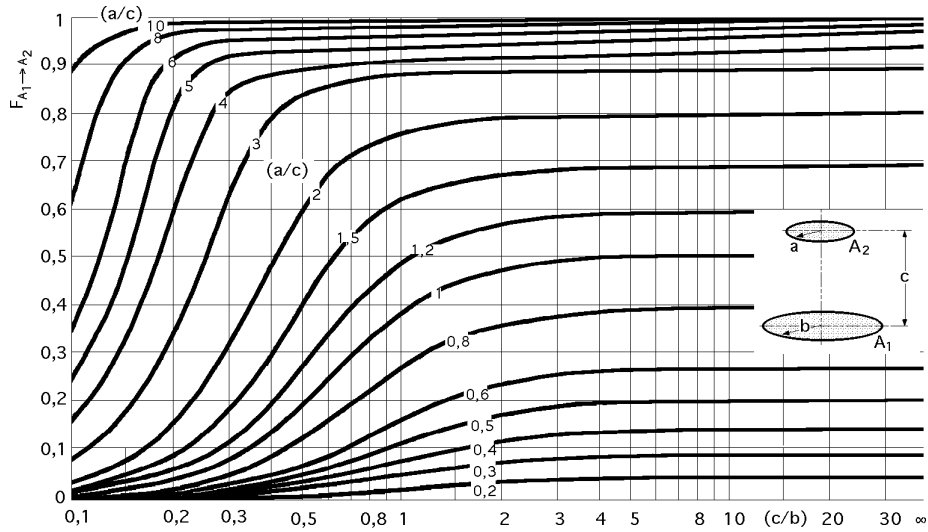
$$+ \frac{\sin \Phi}{2} \frac{\sin 2\Phi}{\cos \Phi} X \sqrt{1 + X^2 \sin^2 \Phi} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{X \cos \Phi}{\sqrt{1 + X^2 \sin^2 \Phi}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{Y - X \cos \Phi}{\sqrt{1 + X^2 \sin^2 \Phi}} \right\} +$$

$$+ \cos \Phi \frac{Y}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \Phi}} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{X - Y \cos \Phi}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \Phi}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\cos \Phi}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \Phi}} \right\} d$$

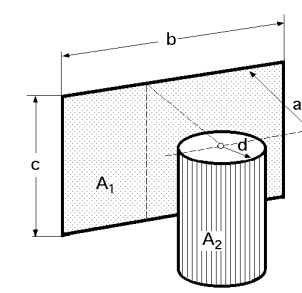
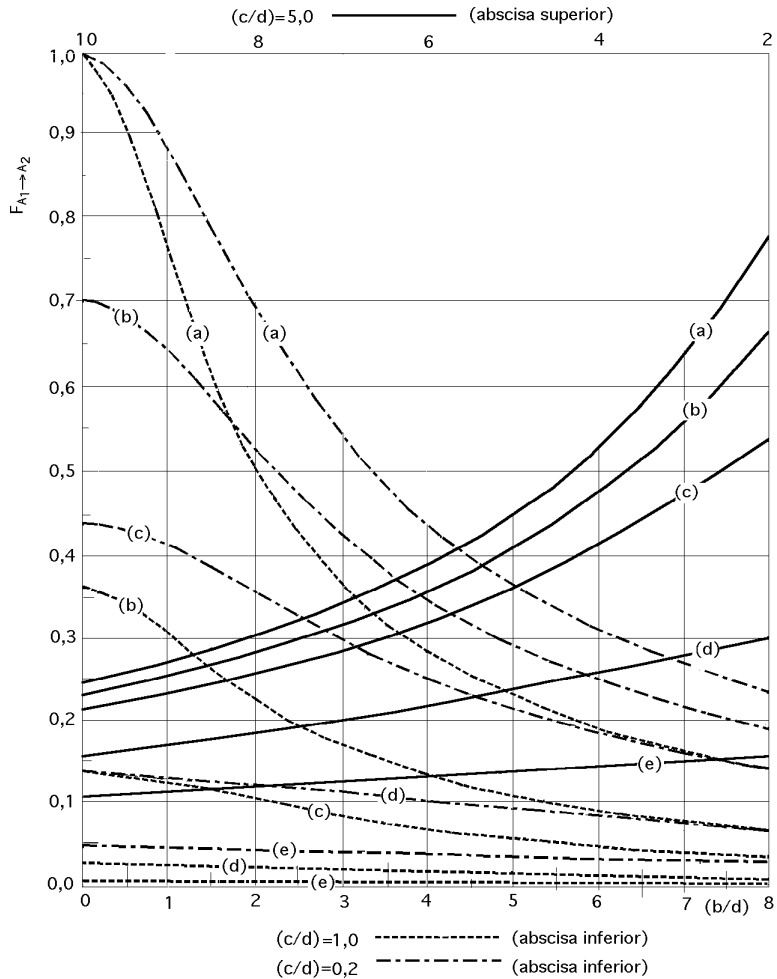


8.- SUPERFICIES CIRCULARES PLANAS CON UNA NORMAL CENTRAL COMÚN

$$X = \frac{a}{c} ; Y = \frac{c}{b} ; Z = 1 + (1 + X^2) Y^2 ; F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ Z - \sqrt{Z^2 - 4 \frac{a^2}{b^2}} \right\}$$

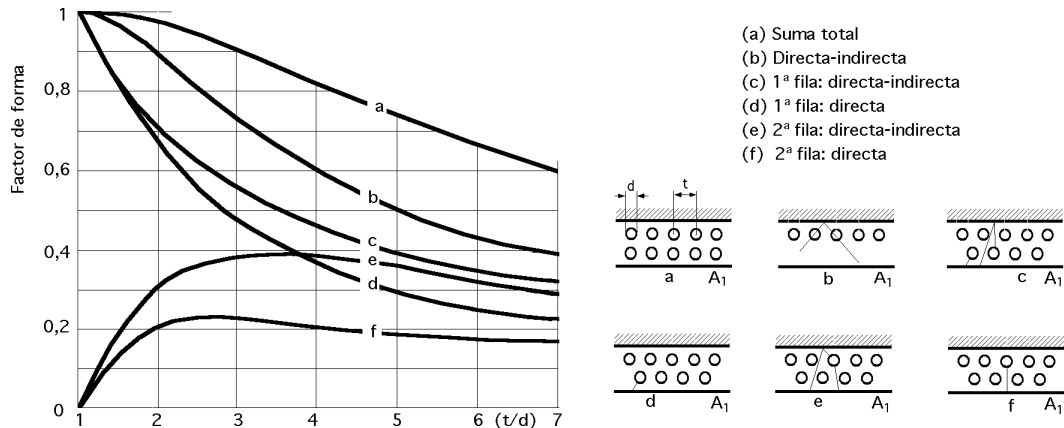


9.- RECTÁNGULO A₁ CON CILINDRO FINITO A₂

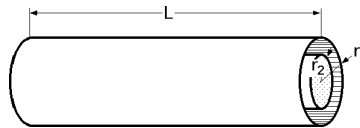


(a/d)	Curva
1,0	a
1,2	b
1,5	c
2,5	d
4,0	e

10.- PLANO A₁ CON RESPECTO A UNA O DOS FILAS DE TUBOS PARALELAS AL PLANO



11.- CILINDROS COAXIALES FINITOS A₁ EXTERIOR, A₂ INTERIOR



$$X = \frac{r_1}{r_2} ; Y = \frac{L}{r_2} ; A = Y^2 + X^2 - 1 ; B = Y^2 - X^2 + 1$$

$$F_{12} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X} \left\{ \arccos \frac{B}{A} - \frac{1}{2Y} (\sqrt{(A+2)^2 - (2X)^2} \arccos \frac{B}{XA}) + B \arcsen \frac{1}{X} - \frac{A}{2} \right\}$$

$$F_{11} = 1 - \frac{1}{X} + \frac{2}{X} \arctg \left(\frac{2\sqrt{X^2-1}}{Y} \right) -$$

$$- \frac{Y}{2X} \left\{ \frac{\sqrt{4X^2+Y^2}}{Y} \arcsen \left(\frac{4(X^2-1) + \frac{Y^2(X^2-2)}{X^2}}{Y^2+4(X^2-1)} \right) - \arcsen \frac{X^2-2}{X^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{4X^2+Y^2}}{Y} - 1 \right) \right\}$$

