II.- CONDUCCIÓN DE CALOR UNIDIRECCIONAL EN RÉGIMEN ESTACIONARIO

II.1.- INTRODUCCIÓN

La conducción es una forma de transferencia térmica según la cual, el calor ***viaja*** desde una región de temperatura elevada a otra de menor temperatura, pudiendo aparecer en los sólidos, en los líquidos y en los gases. Para el caso de los líquidos y gases, la conducción se encuentra normalmente en combinación con la convección; la conducción pura tiene lugar, fundamentalmente, en los sólidos opacos.

En lo que sigue consideraremos que el medio conductor es un sólido, pero los principios que se desarrollan pueden aplicarse asimismo a aquellos líquidos y gases en los que el movimiento convectivo se encuentre limitado por el mecanismo que sea.

El estudio de la conducción térmica se puede realizar siguiendo tres directrices principales:

a) En la primera interviene la conducción en régimen estacionario, en el que la temperatura resulta ser función de una determinada dirección

b) En la segunda la temperatura es función de dos o tres direcciones

c) La tercera se corresponde con la conducción en régimen transitorio

La ecuación de la conducción es una expresión matemática, consecuencia del Principio de Conservación de la Energía en una sustancia sólida; se obtiene mediante un balance energético en un elemento de volumen del material en el que se realiza la transferencia de calor por conducción. Las transferencias de calor debidas a la conducción están relacionadas con la distribución de temperaturas mediante la ley de Fourier.

El balance de energía tiene en cuenta el hecho de que pueda generarse energía en el interior del material; ejemplos típicos de generación interna de energía en un sólido lo constituyen las reacciones químicas que generan calor o el calor generado como consecuencia del paso de una corriente eléctrica a través de una resistencia (efecto Joule), etc.

La forma general de la ecuación de conducción debe tener en cuenta el ***almacenamiento de energía*** en el material. Como la energía interna de un sistema, $U = U(T,t)$, aumenta con la temperatura del mismo, una sustancia sólida experimentará un incremento neto de la energía en ella almacenada cuando aumente su temperatura T a lo largo del tiempo ***t***, y viceversa. Si la temperatura es independiente del tiempo, el sistema está en régimen estacionario; si la temperatura es función del tiempo, se dice que el sistema está en régimen transitorio y, el incremento de su energía interna, viene asociado directamente al almacenamiento de energía.

Se puede clasificar la conducción también por el ***número de dimensiones*** de las coordenadas de que dependa la temperatura; si ésta es función de una sola coordenada, el problema es monodimensional, y si es función de dos o tres, entonces se dice que es un problema bi o tridimensional, respectivamente; si la temperatura es función del tiempo y de la dirección ***x*** en coordenadas rectangulares, o sea, T = T(x,t), se dice que el problema es monodimensional y transitorio.

II.2.- ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN

La conducción es la forma de transferencia de calor en la que se realiza un intercambio de energía desde la región de mayor temperatura a la de menor temperatura, por el movimiento cinético de sus partículas, o por el impacto directo de sus moléculas, como es el caso de los fluidos en reposo, o por el arrastre de electrones como es el caso de los metales.

La ley básica de la conducción del calor, a partir de observaciones experimentales, proviene de Biot, pero en general se conoce con el nombre de ecuación de Fourier, ya que fue él quien la aplicó a su teoría analítica del calor. Esta ley establece que la tasa de transferencia de calor por conducción en una dirección dada, es proporcional al área normal a la dirección del flujo de calor, y al gradiente de temperatura en esa dirección.

Para el flujo térmico en la dirección ***x*** la ley de Fourier viene dada por:

$$Q_x = -\,k\,A\,\frac{\partial T}{\partial x} \quad ó \quad q_x = \frac{Q_x}{A} = -\,k\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

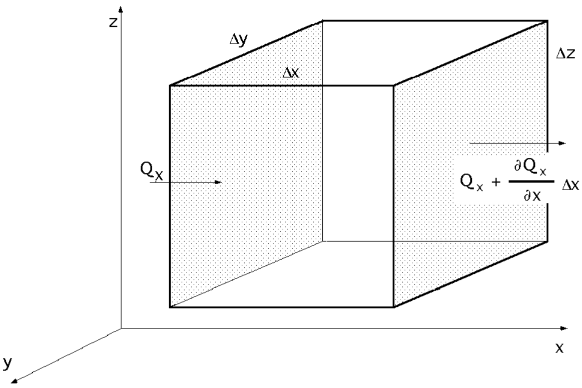

Fig II.1.- Paralelepípedo elemental de fluido

en la que Q_x es el calor que atraviesa la superficie A en la dirección positiva de las ***x***, y q_x es el flujo de calor por unidad de superficie transversal, también en la dirección positiva de las ***x***. La constante ***k*** es la conductividad térmica del material.

Consideraremos en lo que sigue que el flujo es unidireccional según ***x***; la ecuación de Fourier dice que se puede calcular el flujo de calor en la dirección ***x*** si se conoce el gradiente de temperaturas en esa dirección; la distribución de la temperatura en un medio se puede calcular a partir de la solución de la ecuación diferencial de la conducción del calor, cuando se somete a unas condiciones apropiadas de frontera.

Para su determinación consideraremos un elemento de volumen infinitesimal, de dimensiones Δx, Δy, Δz, pudiéndose establecer el siguiente balance energético:

(Energía que atraviesa por conducción el elemento) + (Energía generada en el elemento) =

= (Variación de la energía interna del elemento)

La energía Q_x que entra por conducción al elemento de volumen infinitesimal, Fig II.1, en la dirección ***x***, es:

$$Q_x = q_x\,\Delta y\,\Delta z$$

y la energía saliente en la misma dirección es:

$$Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}\,\Delta x$$

siendo el *balance de energía que atraviesa el elemento de volumen en la dirección* ***x:***

$$Q_x - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}\,\Delta x) = -\,\frac{\partial Q_x}{\partial x}\,\Delta x = -\,\frac{\partial q_x}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

Haciendo lo mismo en las direcciones ***y*** y ***z***:

$$Q_y - (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\,\Delta y) = -\,\frac{\partial Q_y}{\partial y}\,\Delta y = -\,\frac{\partial q_y}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$$Q_z - (Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z}\,\Delta z) = -\,\frac{\partial Q_z}{\partial z}\,\Delta z = -\,\frac{\partial q_z}{\partial z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

La ***energía que por conducción queda almacenada en el elemento de volumen*** es:

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

La ***energía generada o disipada en el elemento de volumen*** viene dada por:

$$E\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

y la variación δU ***de la energía interna en dt***, para el caso de sólidos y líquidos, en los que los calores específicos a presión y volumen constante son iguales ($c_p = c_v$) es de la forma:

$$\delta U = m\ c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} = \rho\ c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}\ \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$$

en la que ρ y c_p no varían con el tiempo.

El balance energético total proporciona la ecuación diferencial de la conducción de calor:

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + E = \rho\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

en la que sustituyendo: $q_x = -\,k\,\frac{\partial T}{\partial x}$; $q_y = -\,k\,\frac{\partial T}{\partial y}$; $q_z = -\,k\,\frac{\partial T}{\partial z}$, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial z}\right) + E = \rho\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

con:

$$T = T(x, y, z, t)\ \text{ y }\ E = E(x, y, z, t)$$

por lo que:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{E}{k} = \frac{\rho\,c_p}{k}\,\frac{\partial T}{\partial t} = \left|\,\alpha = \frac{k}{\rho\,c_p}\,\right| = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t}\quad ;\quad {}^2T + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

que es la ecuación diferencial de la transmisión de calor por conducción en régimen transitorio con generación de energía, y en la que α es la difusividad térmica.

Para analizar la conducción de calor en un cilindro, se utilizan coordenadas cilíndricas, quedando la ecuación anterior en la forma:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

y para el caso de transmisión de calor a través de una esfera:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

en las que hay que tener en cuenta las condiciones de frontera, propias de cada caso a estudiar.

II.3.- CONDUCCIÓN EN UN CILINDRO

Para estudiar la conducción de calor en un cilindro, conviene utilizar la ecuación de coordenadas cilíndricas, que en ausencia de fuentes y sumideros (E = 0), y régimen estacionario, es de la forma:

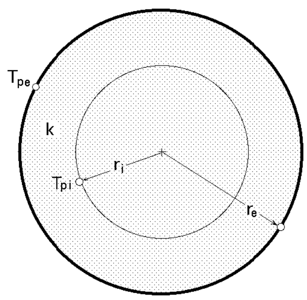

Fig II.2.- Cilindro

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$$

$$r\frac{\partial T}{\partial r} = C_1 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r} \qquad T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Suponiendo que para un punto a la distancia r_i la temperatura es T_i y que para el radio exterior r_e la temperatura es T_{pe}, las condiciones en los límites son, Fig II.2:

$$\text{Para:} \begin{cases} r = r_i \ ; \ T_i = C_1 \ln r_i + C_2 \\ r = r_e \ ; \ T_{pe} = C_1 \ln r_e + C_2 \end{cases}$$

deduciéndose de las mismas las constantes C_1 y C_2:

$$C_1 = \frac{T_{pe} - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \quad ; \quad C_2 = T_i - \frac{T_{pe} - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \ln r_i$$

La distribución de temperaturas T(r) es de la forma:

$$\frac{T(r) - T_i}{T_{pe} - T_i} = \frac{\ln (r/r_i)}{\ln (r_e/r_i)} \qquad T(r) = T_i + (T_{pe} - T_i)\frac{\ln (r/r_i)}{\ln (r_e/r_i)}$$

$$Q(r) = -\,2\pi r L k \frac{dT(r)}{dr} = -\,2\pi r L k \frac{C_1}{r} = -\,2\pi k L \frac{T_{pe} - T_i}{\ln (r_e/r_i)} = \frac{T_i - T_{pe}}{\dfrac{\ln (r_e/r_i)}{2\pi k L}}$$

Cuando: $r_e = r_i + e$, con: $\frac{e}{r_i} >> 1$, la resistencia térmica se reduce a la resistencia de una placa:

$$\frac{e}{2\pi r_i k L} = \frac{e}{k A}$$

El valor de Q es independiente de la posición radial ***r*** en la que T_{p0} y T_i son temperaturas del cilindro, y L es la longitud del mismo. Este estudio se puede ampliar a un tubo, en el que su temperatura interior sea $T_{pF} = T_i$ resultando la siguiente distribución de temperaturas:

$$\frac{T - T_{pF}}{T_{pe} - T_{pF}} = \frac{\ln (r/r_i)}{\ln (r_e/r_i)}$$

El calor transmitido es de la forma: $Q = 2 \pi k L \dfrac{T_{pF} - T_{p0}}{\ln (r_e/r_i)}$

Si ***k*** es variable, función de la temperatura, k = k(T), el flujo de calor es

$$Q = \frac{2 \pi L}{\ln \dfrac{r_e}{r_i}} \int_{T_{pF}}^{T_{p0}} k(T)\, dT$$

Para el caso de cilindros de capas múltiples con convección y radiación al medio exterior, Fig II.3, se puede poner:

$$Q = U A (T_{pF} - T_{p0}) = \frac{T_{pF} - T_{p0}}{\dfrac{1}{U A}}$$

$$\frac{1}{U A} = \frac{1}{2 \pi r_1 L h_{Ci}} + \frac{\ln \dfrac{r_A}{r_1}}{2 \pi k_1 L} + \frac{\ln \dfrac{r_2}{r_A}}{2 \pi k_2 L} + \frac{1}{2 \pi r_2 L (h_{CF} + h_{rF})}$$

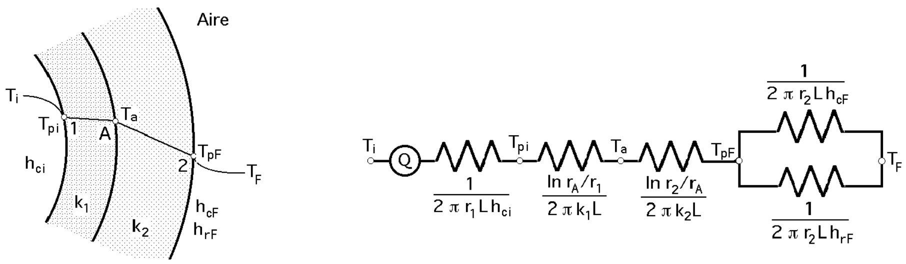

Fig II.3.- Tubería aislada, distribución de temperaturas y circuito térmico correspondiente

en la que la resistencia en paralelo se puede sustituir por una única, considerando un coeficiente de convección: $h_C = h_{cF} + h_{rF}$

II.4.- ESPESOR DE AISLAMIENTO CRITICO PARA UN CILINDRO

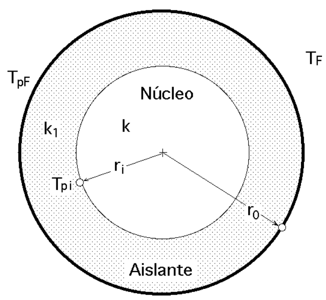

Fig II.4.- Aislamiento de un cilindro, radio crítico

Cuando se recubre un cilindro con una capa de material aislante, cuya resistencia térmica es baja, de modo que este aislamiento exterior esté rodeado por un fluido, se pretende conocer el efecto que producirá el aislamiento adicional sobre la transferencia de calor, desde el interior del cilindro, (con o sin generación de energía, ya que se mantiene constante la temperatura exterior T_{pi} del cilindro), o lo que es lo mismo, que este aislamiento adicional aumente o disminuya la cantidad de calor que se transfiere a partir del cilindro compuesto, (núcleo más aislamiento).

La nomenclatura a utilizar viene indicada en la Fig II.4, en la que se supondrá constante el valor de T_{pi} que es una temperatura del interior del cilindro.

El calor Q que se transfiere a partir del mismo, en régimen permanente, es igual a la pérdida por convección desde la superficie.

$$Q = h_C\, A_0\, (T_{pF} - T_F) = \frac{T_{pF} - T_F}{\dfrac{1}{2\pi\, r_0\, L\, h_C}}$$

Cuando se añade aislamiento y dado que en él no hay generación de energía, la cantidad de calor a disipar se mantiene constante, A_0 aumenta y T_{pF} disminuye. Para determinar cual de estos efectos predomina, el calor Q transmitido se puede calcular entre la temperatura exterior de la pared T_{pi}, y la del medio exterior T_F, en la forma:

$$Q = \frac{T_{pi} - T_F}{R_{k_1} + R_C} = \frac{T_{pi} - T_F}{\dfrac{\ln(r_0/r_i)}{2\pi k_1 L} + \dfrac{1}{2\pi r_0\, L\, h_C}} = \frac{2\pi L\,(T_{pi} - T_F)}{\dfrac{1}{k_1} \ln \dfrac{r_0}{r_i} + \dfrac{1}{r_0\, h_C}} = \frac{T_{pi} - T_F}{R}$$

siendo R la resistencia térmica global.

Derivando la expresión de Q respecto de r_0 se obtiene la condición de disipación de calor máxima o mínima:

$$\frac{dQ}{dr_0} = -\,2\pi L\,(T_{pi} - T_F)\,\frac{\dfrac{1}{k_1\, r_0} - \dfrac{1}{r_0^2\, h_C}}{\left(\dfrac{1}{k_1} \ln \dfrac{r_0}{r_i} + \dfrac{1}{r_0\, h_C}\right)^2} = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{h_C\, r_0}{k_1} = 1 \\ r_0 = \infty \end{cases}$$

La magnitud adimensional $\dfrac{h_C\, r_0}{k_1}$ se conoce como número de Biot: $Bi = \dfrac{h_C\, r_0}{k_1}$

Al valor $r_0 = \dfrac{k_1}{h_C}$ se le denomina radio crítico, y se cumple para un valor del número de Biot igual a la unidad.

Si se calcula la derivada segunda de Q y se aplica la condición: $r_0 = \dfrac{k_1}{h_C}$, se obtiene:

$$\frac{d^2Q}{dr_0^2} = -\,2\pi L\,(T_{pi} - T_F)\,\frac{-\dfrac{r_0}{k_1^2} \ln \dfrac{r_0}{r_i} - 2\,\dfrac{r_0}{k_1^2} + \dfrac{2}{h_C\, k_1} \ln \dfrac{r_0}{r_i} + \dfrac{3}{h_C\, k_1}}{\left(\dfrac{1}{h_C} + \dfrac{r_0}{k_1} \ln \dfrac{r_0}{r_i}\right)^3}$$

$$\left.\frac{d^2Q}{dr_0^2}\right|_{r_0 = \frac{k_1}{h_C}} = -\,2\pi L\,(T_{pi} - T_F)\,\frac{\dfrac{h_C^2}{k_1}}{\left(1 + \ln \dfrac{r_0}{r_i}\right)^2}$$

que siempre es negativa, por lo que el radio crítico r_C, o radio óptimo, dado por el número de Biot igual a la unidad, se corresponde con una pérdida o disipación de calor máxima, para ($r_C = r_0$).

También se podía haber resuelto considerando que el valor de Q es máximo cuando la resistencia R sea mínima, es decir:

$$R = \frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{r_0\, h_C} \quad ; \quad \frac{dR}{dr_0} = \frac{1}{k_1} \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0^2\, h_C} = 0 \qquad \begin{cases} r_0 = \infty \\ r_0 = \dfrac{k_1}{h_C} \end{cases}$$

$$\frac{d^2R}{dr_0^2} = - \frac{1}{k_1} \frac{1}{r_0^2} + \frac{2}{r_0^3\, h_C} = \frac{1}{r_0^2} \left(- \frac{1}{k_1} + \frac{2}{r_0 h_C}\right) = \frac{1}{r_0^2} \left(- \frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_1}\right) = \frac{1}{k_1 r_0^2}$$

que siempre es (+) luego R siempre será mínima y Q máximo:

$$Q = \frac{2\,\pi L\, (T_{pi} - T_F)}{\dfrac{1}{k_1} \ln \dfrac{r_0}{r_i} + \dfrac{1}{r_0\, h_C}} = \frac{2\,\pi L\, (T_{pi} - T_F)}{\dfrac{1}{k_1} \ln \dfrac{r_0}{r_i} + \dfrac{1}{k_1}} = \frac{2\,\pi L\, (T_{pi} - T_F)}{\dfrac{1}{k_1} \left(\ln \dfrac{r_0}{r_i} + 1\right)}$$

Por lo tanto es posible aumentar la disipación de calor de una tubería o de un cilindro, mediante la adición de un aislante, siempre que el radio crítico ($r_C = h_C/k_1$) sea mayor que el radio exterior de la tubería, o cilindro, sin recubrir. El radio crítico es constante para cada tipo de aislamiento y fluido exterior convector, por serlo k_1 y h_C.

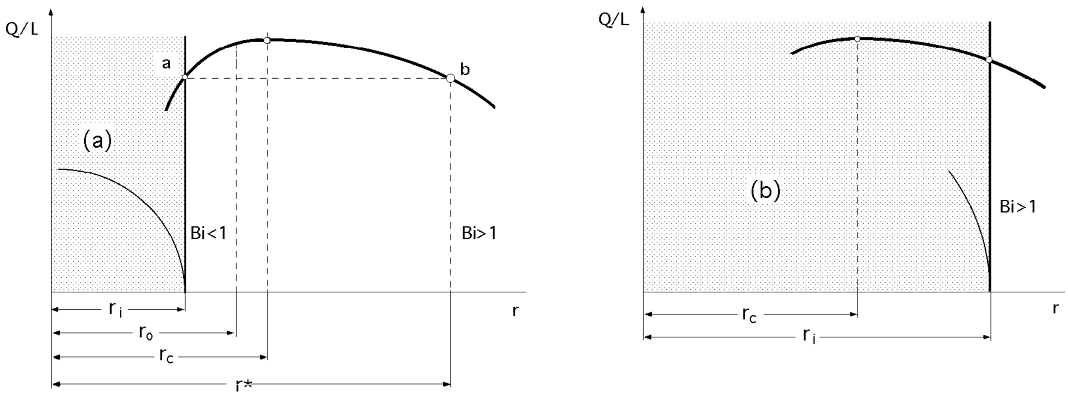

Fig II.5.a.b- Posiciones del radio crítico en tuberías de distinto diámetro

Es posible que para tuberías pequeñas, o para alambres, el radio r_i sea menor que r_C, en cuyo caso la adición de aislante a la tubería o cilindro, descubiertos, (punto ***a***), determina un aumento del calor cedido, hasta que se alcance el radio crítico r_C, tal como se muestra en la Fig II.5.a.

Un aumento posterior del espesor del aislante hará que el calor disipado descienda desde el máximo a otro valor inferior (punto b), de radio r^*, en que el calor disipado es igual al del tubo o cilindro desnudos; es posible que, en estas circunstancias, la solución encontrada sea absurda e imposible de llevar a la práctica.

Por lo tanto, para conseguir una pérdida de calor menor que la que cede el tubo o cilindro al descubierto, será preciso añadir un espesor de aislante ***e*** superior a ($r^* - r_i$) $\qquad e > r^* - r_i$.

En la Fig II.5.b, se tiene una situación típica de tubería de gran diámetro ($2\, r_i$) en la que el radio exterior de la misma r_i es mayor que el radio crítico r_C y, en consecuencia, cualquier aislante que se añada, disminuirá la pérdida de calor.

Para, Bi < 1, que implica que ($r_i < r_C$) la adición de aislamiento en cilindros o tuberías de pequeño diámetro, incrementa la cantidad de calor transferida al exterior.

Para, Bi > 1, que implica que ($r_i > r_C$) el aislamiento adicional a tuberías y conducciones de gran diámetro, hará disminuir la transferencia de calor, lo que implica un mejor aislamiento.

Si se considera la radiación: $r_C = \dfrac{k}{h_C + h_r}$

En realidad el valor de r_0 es sólo una aproximación ya que se ha supuesto que el coeficiente de transmisión de calor era independiente de r_0; sin embargo, desde un punto de vista práctico, no se necesita un valor exacto de r_0, por cuanto al ser el valor de Q máximo, la pérdida de calor no es sensible a los cambios de r, cuando r esté cerca de r_0.

II.5.- PARED ESFÉRICA SIN GENERACIÓN DE ENERGÍA

En régimen permanente se tiene que $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ y si no existen fuentes ni sumideros ($E = 0$); para un material isótropo, la temperatura es función del radio ρ, $T = T(\rho)$, y por lo tanto, el flujo de calor se puede considerar monodimensional.

La ecuación diferencial de la distribución de temperaturas es:

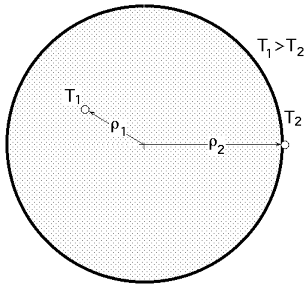

Fig II.6.- Esfera

$$ {}^2T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{l} T = T(\rho) \\ \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{array}\right\} \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = \left| \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} \right| = \frac{x}{\rho}\,\frac{\partial T}{\partial \rho}$$

se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\,\frac{x}{\rho} + \frac{\partial T}{\partial \rho}\,\frac{\rho - x\,\dfrac{\partial \rho}{\partial x}}{\rho^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \frac{\partial T}{\partial \rho}\,\frac{\rho^2 - x^2}{\rho^3}$$

Resultados similares se obtendrían para, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ y $\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$, por lo que:

$$ {}^2T = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}\,\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho^2} + \frac{\partial T}{\partial \rho}\left(\frac{3}{\rho} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho^3}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{\partial T}{\partial \rho}\,\frac{2}{\rho} = 0$$

Si al gradiente de temperaturas en la dirección radial le llamamos ***u***, la distribución de temperaturas es de la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = u = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{2\,u}{\rho} = 0 \quad ; \quad \dfrac{du}{u} + \dfrac{2\,d\rho}{\rho} = 0 \\ \ln u + 2 \ln \rho = \ln C \quad ; \quad u\,\rho^2 = C \end{array} \right| = \frac{C}{\rho^2} \quad ; \quad T = -\frac{C}{\rho} + B$$

Las condiciones en los límites, son:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = -C\,\dfrac{1}{\rho_1} + B \\ T_2 = -C\,\dfrac{1}{\rho_2} + B \end{array}\right\} \qquad T_1 - T_2 = -\frac{C\,(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1\,\rho_2} = -\frac{C\,e}{\rho_1\,\rho_2} \qquad \left\{\begin{array}{l} C = -\dfrac{T_1 - T_2}{e}\,\rho_1\,\rho_2 \\ B = T_1 - \dfrac{T_1 - T_2}{e}\,\rho_2 \end{array}\right.$$

La distribución de temperaturas en paredes esféricas es de la forma:

$$T = \frac{\rho_1 \rho_2}{e \rho} (T_1 - T_2) - \frac{\rho_2}{e} (T_1 - T_2) + T_1 = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{e} \rho_2 (\frac{\rho_1}{\rho} - 1)$$

$$\frac{T - T_1}{T_1 - T_2} = \frac{\rho_2}{e} (\frac{\rho_1}{\rho} - 1)$$

viniendo dado el calor transmitido por conducción por la expresión:

$$Q = - k A \frac{\partial T}{\partial \rho} = - k 4 \pi \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} = - 4 \pi k \rho^2 \frac{C}{\rho^2} = 4 \pi k \rho_1 \rho_2 \frac{T_1 - T_2}{e}$$

observándose que Q depende de ρ_1 y se va diluyendo a medida que aumenta ρ_1, (ρ_2 es constante), por cuanto aumenta la sección.

Esta expresión para el calor se puede poner también en la forma:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{e}{4 \pi \rho_1 \rho_2 k}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{esf}} = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{\rho_2 - \rho_1}{4 \pi \rho_1 \rho_2 k}} = 4 \pi k \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{1}{\rho_1} - \dfrac{1}{\rho_2}}$$

en la que R_{esf} se denomina ***resistencia térmica de la esfera***, en analogía con la ley de Ohm.

Para determinar el calor evacuado a través de una esfera hueca, de radio interior r_1 y radio exterior r_2, calentada por un fluido a T_F, a un medio exterior a T_0, se tendrá:

$$Q = \frac{T_F - T_0}{\dfrac{1}{4 \pi r_1^2 h_{pF}} + \dfrac{e}{4 \pi r_1 r_2 k} + \dfrac{1}{4 \pi r_2^2 h_{p0}}}$$

siendo h_{pF} el coeficiente de convección en el interior de la esfera y h_{p0} en el exterior.

Para una esfera recubierta con un aislante de conductividad térmica k*, y radio r_3, el radio crítico se obtiene en la forma:

$$Q = 4 \pi \frac{T_2 - T_{pF}}{\dfrac{r_3 - r_2}{4 \pi r_2 r_3 k^*} + \dfrac{1}{4 \pi r_3^2 h_{cF}}} = 4 \pi \frac{T_2 - T_{pF}}{R}$$

$$R = \frac{r_3 - r_2}{4 \pi r_2 r_3 k^*} + \frac{1}{4 \pi r_3^2 h_{cF}} \qquad \frac{dR}{dr_3} = \frac{r_2^2 k^*}{(r_2 r_3 k^*)^2} - \frac{2 r_3 h_{cF}}{(r_3 h_{cF})^2} = 0 \qquad r_3 = r_{crít} = \frac{2 k^*}{h_{cF}}$$

Si se considera la radiación: $r_{crít} = \dfrac{2 k^*}{h_C + h_r}$

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

Hasta ahora sólo hemos considerado problemas de conducción térmica sin generación de calor dentro del propio material. Cuando haya que tener en cuenta la generación interna de calor se resuelve en primer lugar la ecuación de la energía para la distribución de temperaturas que exista en el material de que se trate. La solución contendrá dos constantes de integración que deberán determinarse mediante condiciones de contorno adecuadas. A continuación se utilizará la ley de Fourier para determinar el flujo de calor a través del sólido.

Sabemos que el calor puede generarse internamente de diversas maneras; dentro de un material sólido pueden producirse reacciones químicas tanto endotérmicas como exotérmicas. Una reacción exotérmica generará calor, mientras que una reacción endotérmica absorberá calor del material, originando un sumidero de calor. Si una corriente eléctrica pasa a través de una resistencia, se genera calor en el conductor. También se produce calor en los materiales fisionables como consecuencia de las reacciones nucleares que tienen lugar dentro de los mismos.

PARED PLANA.- Como ejemplo en el que interviene la generación de calor, consideraremos una pared plana de espesor (e = 2 L) Fig II.7, en la que se produce la generación constante de calor, uniformemente distribuida a través de la totalidad del volumen de material.

Para su estudio consideraremos la mitad de su espesor, que nos va a permitir introducir el concepto de frontera aislada o adiabática; partiendo de la ecuación:

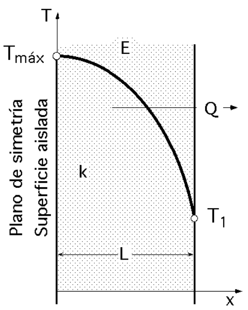

Fig II.7.- Pared plana

$$^2T + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Integrándola en la dirección x se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2T}{dx^2} + \dfrac{E}{k} = 0 \\ \dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{E\,x}{k} + C_1 \end{array}\right\} \qquad T = -\frac{E\,x^2}{2\,k} + C_1\,x + C_2$$

Las constantes se determinan con las condiciones de contorno:

Una frontera aislada o adiabática es aquella en la que el gradiente de temperaturas es cero; la condición de frontera adiabática se tiene en el plano de simetría (x = 0) y es la primera condición de contorno, de la forma:

$$x = 0 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \qquad C_1 = 0$$

La segunda condición de contorno se tiene para ($x = L$; $T = T_1$):

$$x = L \qquad T = T_1 = -\frac{E\,L^2}{2\,k} + C_2 \qquad C_2 = T_1 + \frac{E\,L^2}{2\,k}$$

Sustituyendo C_1 y C_2 se obtiene la distribución de temperaturas:

$$T = -\frac{E\,x^2}{2\,k} + T_1 + \frac{E\,L^2}{2\,k}$$

que es una distribución parabólica con respecto a x; el valor máximo de la temperatura, supuesto E manantial, se presenta en la superficie aislada (x = 0), por cuanto:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{E\,x}{k} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_{x=0} = -\frac{E}{k} \quad \text{(máximo)}$$

$$T_{máx} = T_1 + \frac{E\,L^2}{2\,k} \qquad \frac{T_{máx}}{T_1} = 1 + \frac{E\,L^2}{2\,k\,T_1}$$

Toda la energía generada dentro de la pared se conduce hacia la superficie libre (x = L) en la forma:

$$Q = - k A \frac{\partial T}{\partial x} = k A \frac{E x}{k} = A E x$$

No puede transferirse ninguna energía calorífica a través de la superficie extrema correspondiente a (x = 0) porque está aislada y no puede almacenarse ninguna energía en el material, por cuanto se han impuesto condiciones estacionarias.

La energía que llega a la superficie (x = L) es:

$$Q_{x=L} = A E L = V E$$

siendo V el volumen de media pared plana de espesor L.

PLACA PLANA RODEADA POR UN FLUIDO CONVECTOR..- A continuación se supone que rodeando a la placa se encuentra un fluido convector, Fig II.8, con temperatura T_F y coeficiente de convección con el medio exterior $\boldsymbol{h_C}$.

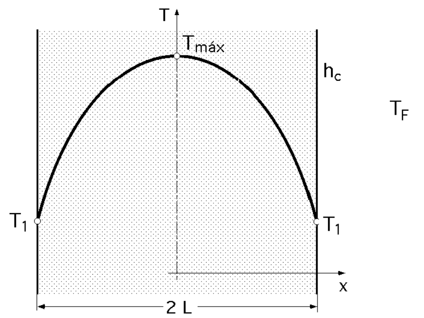

Fig II.8.- Placa plana rodeada por un fluido (Distribución de temperaturas)

El calor generado en la placa atraviesa ésta por conducción, y luego va escapando al fluido exterior por convección; partiendo de:

$$T = - \frac{E x^2}{2 k} + C_1 x + C_2 \quad ; \quad \frac{dT}{dx} = - \frac{E x}{k} + C_1$$

las constantes de integración y los valores de $T_1 = T_{pF}$ y $T_{máx}$ se calculan teniendo en cuenta que el calor que atraviesa por conducción la cara exterior de la placa, escapa al fluido por convección:

$$\text{Para: } \begin{cases} x = 0 \ ; \ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \qquad C_1 = 0 \ ; \ C_2 = T_{máx} = T_1 + \frac{E L^2}{2 k} \\ x = L \ ; \ - k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = h_C (T_1 - T_F) \ ; \ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = \frac{- h_C (T_1 - T_F)}{k} = - \frac{E L}{k} \qquad T_1 = T_F + \frac{E L}{h_C} \end{cases}$$

$$T_1 = T_F + \frac{E L}{h_C} = - \frac{E L^2}{2 k} + T_{máx} \qquad T_{máx} = T_F + \frac{E L}{h_C} + \frac{E L^2}{2 k}$$

Distribución de temperaturas:

$$T = T_{máx} - \frac{E x^2}{2 k} = T_1 + \frac{E L^2}{2 k} - \frac{E x^2}{2 k} = T_1 + \frac{E}{2 k} (L^2 - x^2) = T_F + \frac{E L^2}{2 k} - \frac{E x^2}{2 k} + \frac{E L}{h_C} =$$

$$= T_F + \frac{E L}{k} \left(\frac{L}{2} - \frac{x^2}{2 L} + \frac{k}{h_C}\right)$$

Para: $\begin{cases} \text{Sólido isotermo: } Bi \rightarrow 0 \ ; \ k \rightarrow \infty \ ; \ T = T_1 = T_F + \frac{E L}{h_C} \\ \text{Fluido isotermo: } Bi \rightarrow \infty \ ; \ h_C \rightarrow \infty \ ; \ T = T_F + \frac{E L}{2 k} \left(L - \frac{x^2}{L}\right) \end{cases}$

El calor que pasa de la placa al fluido es:

$$Q = 2\,A\,h_C\,(T_1 - T_F) = 2\,A\,h_C\,(T_F + \frac{E\,L}{h_C} - T_F) = 2\,A\,E\,L = E\,V$$

PARED CILÍNDRICA.- Supongamos un conductor cilíndrico macizo, Fig II.9, por el que circula una corriente eléctrica de intensidad I y resistencia R*. La superficie lateral del cilindro está a la temperatura T_0. La energía generada en el cilindro, por unidad de volumen, es:

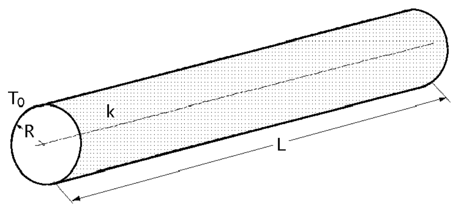

Fig II.9.- Pared cilíndrica

$$E = \frac{R^*\ I^2}{V}$$

siendo V el volumen del cilindro.

El valor de E es constante para: I = Cte y R* = Cte

La distribución de temperaturas se obtiene a partir de la conducción monodimensional y estacionaria en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{E}{k} = 0 \quad ; \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{E\,r}{2\,k} + \frac{C_1}{r} \quad ; \quad T = -\frac{E\,r^2}{4\,k} + C_1 \ln r + C_2$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2 se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

a) Para la temperatura en el eje del cilindro r = 0, se tiene:

$$\ln r = \ln 0 = -\infty \qquad C_1 = 0$$

por cuanto la temperatura correspondiente tendría que ser ∞, que no es posible.

b) Para: r = R y T = T_0, resulta:

$$T_0 = -\frac{E\,R^2}{4\,k} + C_2 \qquad C_2 = T_0 + \frac{E\,R^2}{4\,k}$$

por lo que la distribución de temperaturas queda en la forma:

$$T = T_0 - \frac{E\,r^2}{4\,k} + \frac{E\,R^2}{4\,k} = T_0 - \frac{E\,R^2}{4\,k}\{1 - (\frac{r}{R})^2\} \qquad \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{E\,R^2}{4\,k\,T_0}\{1 - (\frac{r}{R})^2\}$$

La temperatura máxima del cilindro se encuentra a lo largo del eje del mismo

$$\frac{dT}{dx}_{r=0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2T}{dr^2}_{r=0} = -\frac{E}{k} \quad \text{(máximo)}$$

y vale:

Para: $r = 0$; $T = T_{máx} = T_0 + \frac{E\,R^2}{4\,k}$

Si se supone que el conductor cilíndrico disipa calor al exterior, se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial r}_{r=R} = -\frac{h_C}{k}(T_0 - T_F) = -\frac{E\,R}{2\,k} \qquad T_0 = T_F + \frac{E\,R}{2\,h_C}$$

Teniendo en cuenta:

$$T - T_0 = \frac{E\,R^2}{4\,k}\{1 - (\frac{r}{R})^2\}$$

resulta la siguiente distribución de temperaturas, y temperatura máxima:

$$T - T_F = \frac{E R}{2 h_C} + \frac{E R^2}{4 k} - \frac{E r^2}{4 k} = \frac{E R}{2 h_C} (1 + \frac{R h_C}{2 k} - \frac{r^2 h_C}{2 k R})$$

$$T_{máx} = T_F + \frac{E R}{2 h_C} (1 + \frac{R h_C}{2 k}) = T_F + \frac{E R}{2 h_C} (1 + \frac{Bi}{2})$$

Si, $Bi \to 0$ $\quad k \to \infty$, (sólido isotermo), la temperatura variará preferentemente en el fluido (gas):

$$T = T_F + \frac{E R}{2 h_C}$$

Si, $Bi \to \infty$ $\quad h_C \to 0$, por lo que el fluido será isotermo (metales líquidos), y la diferencia de temperaturas se origina en el sólido ($T = T_F$)

Calor eliminado al exterior:

$$Q = - k A (\frac{\partial T}{\partial r})_{r=R} = - k A \frac{E R}{2 k} = - E \pi R^2 L = - E V$$

PARED CILÍNDRICA RODEADA CON UNA VAINA EN CONTACTO CON UN FLUIDO CONVECTOR.-

En este caso, supondremos que el núcleo de radio R genera calor, mientras que el recubrimiento de radio R_e no, por lo que habrá que estudiar por separado el núcleo del recubrimiento o vaina, teniendo en cuenta que tienen una frontera común. Supondremos el conjunto (núcleo-vaina) de la Fig II.10, en régimen estacionario y conducción monodimensional, es decir, $T = T(r)$.

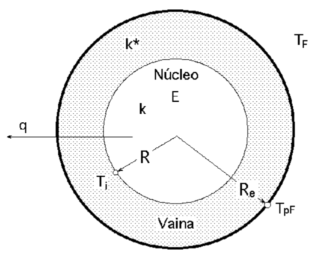

Fig II.10.- Núcleo generador de calor rodeado con un aislante

Para el núcleo ($E \neq 0$) se tiene lo visto anteriormente:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dT}{dr}) + \frac{E}{k} = 0 \quad ; \quad \frac{dT}{dr} = - \frac{E r}{2 k} + \frac{C_1}{r}$$

$$T = - \frac{E r^2}{4 k} + C_1 \ln r + C_2$$

Para: $r = 0 , C_1 = 0$ $\qquad T = - \dfrac{E r^2}{4 k} + C_2$

Para el aislante, la distribución de temperaturas con $E = 0$ es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dT}{dr}) = 0 \ ; \ r \frac{\partial T}{\partial r} = C_3 \ ; \ \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_3}{r} \qquad T = C_3 \ln r + C_4$$

Condiciones de contorno:

a) Para: $r = R$ y $T = T_i$ común al núcleo y a la vaina, por ser la unión perfecta:

$$T_i = C_2 - \frac{E R^2}{4 k} = C_3 \ln r_i + C_4 \quad ; \quad C_2 = T_i + \frac{E R^2}{4 k} = \frac{E R^2}{4 k} + C_3 \ln r_i + C_4$$

que relaciona las constantes de integración C_2, C_3 y C_4.

La constante C_2 permite hallar la temperatura máxima en el núcleo, conocida T_i:

$$C_2 = T_{máx} = T_i + \frac{E R^2}{4 k}$$

b) El calor que abandona el núcleo, es absorbido por la vaina:

$$q_{r=R}^{vaina} = q_{r=R}^{núcleo} \quad ; \quad -k\,\frac{dT}{dr}_{r=R}^{núcleo} = -k^*\,\frac{dT}{dr}_{r=R}^{vaina}$$

$$-k\left(-\frac{E\,R}{2\,k}\right) = -k^*\,\frac{C_3}{R} \quad ; \quad C_3 = -\frac{E\,R^2}{2\,k^*}$$

c) En la superficie exterior de la vaina en contacto con el medio exterior:

$$q_{r=R_e}^{vaina} = q_{r=R_e}^{fluido} \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} q_{r=R_e}^{vaina} = -k^*\,\dfrac{dT}{dr}_{r=R_e} = -k^*\,\dfrac{C_3}{R_e} \\ q_{r=R_e}^{fluido} = h_C\,(T_{pF} - T_F) \end{array}\right\} \qquad -k^*\,\frac{C_3}{R_e} = h_C\,(T_{pF} - T_F)$$

$$C_3 = \frac{-h_C\,(T_{pF} - T_F)\,R_e}{k^*} = -\frac{E\,R^2}{2\,k^*} \qquad T_{pF} = T_F + \frac{E\,R^2}{2\,h_C\,R_e}$$

$$T = C_3 \ln r + C_4 = \left|\ \text{para: } r = R_e\,,\ T = T_{pF}\ \right| \quad \left\{\begin{array}{l} T_{pF} = C_3 \ln R_e + C_4 \\ T_F + \dfrac{E\,R^2}{2\,h_C\,R_e} = \dfrac{-E\,R^2}{2\,k^*} \ln R_e + C_4 \end{array}\right.$$

$$C_4 = T_{pF} + \frac{E\,R^2}{2\,k^*} \ln R_e = T_F + \frac{E\,R^2}{2}\left(\frac{1}{h_C\,R_e} + \frac{\ln R_e}{k^*}\right)$$

Con los valores de C_3 y C_4 se calcula el valor de C_2 en función de la temperatura del fluido T_F:

$$C_2 = \frac{E\,R^2}{4\,k} + C_3 \ln R + C_4 = T_F + E\,R^2\left(\frac{1}{2\,h_C\,R_e} + \frac{1}{4\,k} + \frac{1}{2\,k^*} \ln \frac{R_e}{R}\right)$$

siendo la temperatura en la superficie del cilindro:

$$T_i = C_2 - \frac{E\,R^2}{4\,k} = T_F + \frac{E\,R^2}{2}\left(\frac{1}{h_C\,R_e} + \frac{1}{k^*} \ln \frac{R_e}{R}\right)$$

Los flujos térmicos por unidad de sección son las siguientes:

$$\text{NUCLEO:}\quad \frac{dT}{dr}_{núcleo} = -\frac{E\,r}{2\,k} \quad ; \quad q = -k\,\frac{dT}{dr} = \frac{E\,r}{2} \quad \text{(aumenta con } r\text{)}$$

$$\text{VAINA:}\quad \frac{dT}{dr}_{vaina} = -\frac{E\,R^2}{2\,k^*\,r} \quad ; \quad q = -k^*\,\frac{dT}{dr} = \frac{E\,R^2}{2\,r} \quad \text{(disminuye cuando aumenta } r\text{)}$$

El calor total que se disipa al exterior es:

$$Q = q_{r=R_e}\,2\,\pi\,R_e\,L = \pi\,R^2 L\,E = V\,E$$

siendo V el volumen del núcleo.

Si hubiere N elementos generadores: $Q = \pi\,R^2 L\,E\,N = V\,E$

La distribución de temperaturas en el núcleo es parabólica:

$$T_{núcleo} = T_i + \frac{E\,R^2}{4\,k} - \frac{E\,r^2}{4\,k} = -\frac{E\,r^2}{4\,k} + T_F + \frac{E\,R^2}{2}\left(\frac{1}{h_C\,R_e} + \frac{1}{2\,k} + \frac{1}{k^*} \ln \frac{R_e}{R}\right)$$

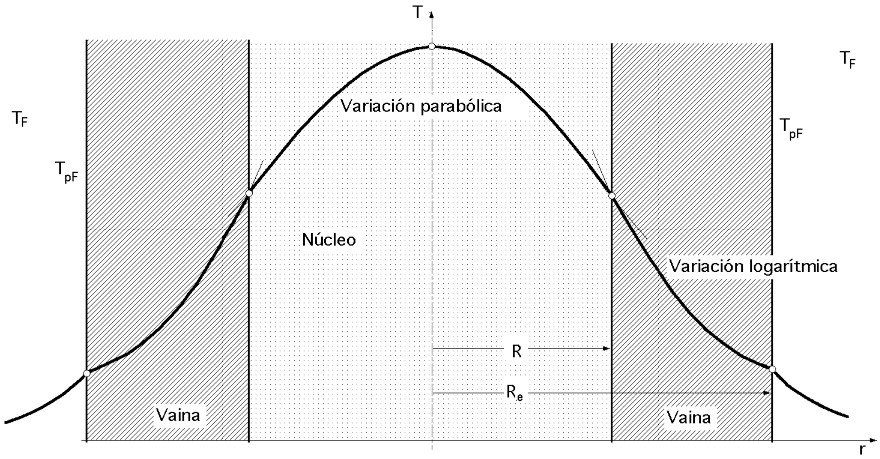

Fig II.11.- Distribución de temperaturas en el núcleo y en la vaina

mientras que a la salida de la vaina es logarítmica:

$$T_{vaina} = - \frac{E R^2}{2 k^*} \ln r + T_F + \frac{E R^2}{2} \left(\frac{1}{h_C R_e} + \frac{\ln R_e}{k^*} \right) = T_F + \frac{E R^2}{2} \left(\frac{1}{h_C R_e} + \frac{1}{k^*} \ln \frac{R_e}{r} \right)$$

En el entronque común para, r = R, se tiene:

$$q = q^* \quad ; \quad - k \frac{dT}{dr} \Big)_{núcleo} = - k^* \frac{dT}{dr} \Big)^*_{vaina} \quad ; \quad \frac{\frac{dT}{dr}\Big)_{núcleo}}{\frac{dT}{dr}\Big)^*_{vaina}} = \frac{k^*}{k}$$

que dice que las tangentes a las curvas, $T = T(r)$ y $T^* = T^*(r)$, son tanto más divergentes, cuanto más distintas sean las conductividades $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{k^*}$.