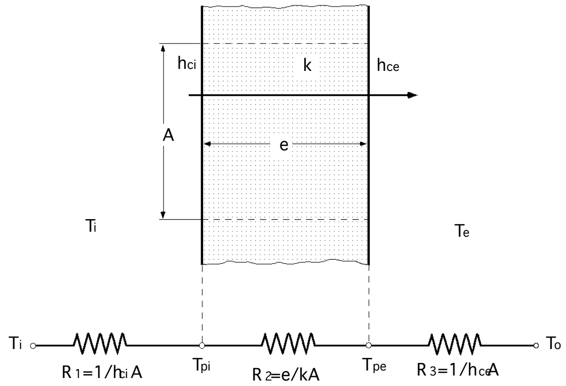
II.1.- Una pared de ladrillo de 0,1 metros de espesor y k = 0,7 W/m°K, está expuesta a un viento frío de 270°K, con un coeficiente de película de 40 W/m²°K. El lado opuesto de la pared está en contacto con el aire en calma a 330°K, y coeficiente de película de 10 W/m²°K.
Calcular el calor transmitido por unidad de área y unidad de tiempo.

RESOLUCIÓN



$$q = \frac{T_{int} - T_{ext}}{\sum_{i=1}^{3} R_i} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_1 = \frac{1}{h_{ci}\,A} = \frac{1}{40 \times 1} = 0{,}025\ \frac{ºC}{W}$$

$$R_2 = \frac{e}{k\,A} = \frac{0{,}1}{0{,}7 \times 1} = 0{,}143\ \frac{ºC}{W}$$

$$R_3 = \frac{1}{h_{ce}\,A} = \frac{1}{10 \times 1} = 0{,}1\ \frac{ºC}{W}$$

Calor transmitido por unidad de superficie y unidad de tiempo:

$$\frac{q}{A} = \frac{330 - 270}{0{,}025 + 0{,}143 + 0{,}10} = 224\ \frac{W}{m^2}$$

****

II.2.- Una pared plana grande, tiene un espesor de 0,35 m; una de sus superficies se mantiene a una temperatura de 35°C, mientras que la otra superficie está a 115°C. Únicamente se dispone de dos valores de la conductividad térmica del material de que está hecha la pared; así se sabe que a 0°C, k = 26 W/m°K y a 100°C, k = 32 W/m°K.
Determinar el flujo térmico que atraviesa la pared, suponiendo que la conductividad térmica varía linealmente con la temperatura

---

RESOLUCIÓN

Se sabe que para T = 0°C ; $k = 26\ \frac{W}{m.°K}$ y que para T = 100°C ; $k = 32\ \frac{W}{m.°K}$

La temperatura media de la pared es: $T_p = \frac{115 + 35}{2} = 75°C$

El coeficiente de conductividad térmica media se puede obtener interpolando linealmente entre las dos temperaturas dadas:

$$\frac{\hat{k} - 26}{75} = \frac{32 - 26}{100}\ ;\ \hat{k} = 26 + 4{,}5 = 30{,}5\ \frac{W}{m.°C}$$

Flujo térmico a través de la pared: $\frac{q}{A} = \hat{k}\,\frac{T_{pi} - T_{pe}}{e} = 30{,}5 \times \frac{115 - 35}{0{,}35} = 6971{,}5\ \frac{W}{m^2}$

****

II.3.- Calcular la densidad de flujo térmico por metro lineal de un conducto cilíndrico, de diámetro exterior d_e = 12 cm, y diámetro interior d_i = 5 cm, si la temperatura T_e = 200°C y la interior T_i= 60°C. Se supondrá una conductividad térmica del material, a la temperatura media, de 0,50 Kcal/ m.h.°C

RESOLUCIÓN

$$q = -k\ A\ \frac{dT}{dr} = -k\,(2\,\pi\,r\ L)\,\frac{dT}{dr} = -2\,\pi\,k\ L\,\frac{T_{pi} - T_{pe}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = -2\,\pi \times 0{,}5\ \frac{Kcal}{h.m.°C} \times 1\ m \times \frac{60 - 200}{\ln \frac{6}{2{,}5}} = 502{,}3\ \frac{Kcal}{hora}$$

****

II.4.- En un tubo cilíndrico de 4 cm de diámetro interior y 8 cm de diámetro exterior se transmite calor por conducción en dirección radial, manteniéndose las temperaturas de las superficies interior y exterior a T_{pi} = 80°C y T_{pe} = 100°C. Si la conductividad térmica del material de que está formado el tubo varía linealmente con la temperatura en la forma:
k = 1 + 0,004 T, con k en Kcal/m.h.°C, y T en °C

Determinar la temperatura del tubo en la zona correspondiente a un diámetro d=6 cm en los siguientes supuestos:

a) Trabajando con el valor medio de k

b) Trabajando con el valor de k correspondiente a cada punto del tubo.

RESOLUCIÓN

a) Trabajando con el valor medio de “k”:

$$\hat{k} = \frac{\int_{T_{pi}}^{T_{pe}} k\, dT}{T_{pe} - T_{pi}} = \frac{\int_{80}^{100} (1 + 0{,}004\ T)\ dT}{100 - 80} = 1{,}36\ \frac{Kcal}{h\ m°C}$$

$$q = 2\ \pi\ \hat{k}\ L\ \frac{T_{pe} - T_{pi}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = 2\ \pi \times 1{,}36\ (\frac{Kcal}{h.m.°C}) \times 1\ m\ \frac{100 - 80}{\ln \frac{4}{2}} = 246{,}56\ \frac{Kcal}{hora}$$

Temperatura T del tubo en un diámetro correspondiente a: d = 6 cm

$$2\ \pi \times 1{,}36\ (\frac{Kcal}{h.m.°C}) \times 1\ m\ \frac{100 - T}{\ln \frac{4}{3}} = 246{,}56\ \frac{Kcal}{hora}\ ;\ T = 91{,}7\ °C$$

b) En el supuesto de trabajar con el valor de ***k*** correspondiente a cada punto del tubo, se puede suponer un valor de ***k*** de la forma:

$$k = \frac{k_{Tpe} + k_T}{2} = \frac{(1 + 0{,}004 \times 100) + (1 + 0{,}004\ T)}{2} = 1{,}2 + 0{,}002\ T$$

$$246{,}56 = \frac{2\ \pi\ (1{,}2 + 0{,}002\ T)(100 - T)}{\ln \frac{4}{3}}\ ;\ 0{,}002\ T^2 + T - 108{,}72 = 0\ ;\ T = 91{,}84°C$$

Con esta temperatura de 91,84ºC habría que iterar y rehacer los cálculos.

****

II.5.- Un tubo de diámetro d_e = 0,5 metros, cuya emitancia superficial vale ε=0,9, que transporta vapor de agua, posee una temperatura superficial de 500°K. El tubo está localizado en una habitación a 27°C, y el coeficiente de transmisión de calor por convección entre la superficie del tubo y el aire de la habitación se puede considerar igual a h_C = 20 W/m²°K.

Calcular

a) La conductancia superficial unitaria combinando radiación y convección

b) El calor disipado por unidad de tiempo y por metro de longitud del tubo

---

RESOLUCIÓN

a) El tubo se puede considerar como un cuerpo emisor, rodeado por un cuerpo negro que es la habitación; además hay que tener presente la convección. Por lo tanto, la conductancia global será:

$$h = h_C + h_R = \left| \begin{array}{l} h_C = 20\ \frac{W}{m^2\ ºK} \\ h_R = \frac{\sigma\ \varepsilon\ A\ (T_{tubo}^4 - T_{ext}^4)}{A(T_{tubo} - T_{ext})} = \frac{5{,}67.10^{-8}\ (W/m^2\ ºK^4) \times 0{,}9 \times 1\ m^2\ (500^4 - 300^4)ºK^4}{(500 - 300)ºK} = 13{,}88\ \frac{W}{mºK} \end{array} \right| =$$

$$= 20 + 13{,}88 = 33{,}88\ \frac{W}{m^2\ ºK}$$

b) Pérdida de calor por unidad de tiempo y por metro de longitud de tubo:

$$Q = \pi d_e L\ h\ (T_{tubo} - T_{ext}) = \pi \times 0{,}5 \times 1 \times 33{,}88\ (500 - 300) = 10650\ W$$

****

II.6.- En una tubería de aluminio vaporiza agua a 110°C. La tubería tiene un coeficiente de conductividad térmica k = 185 W/m°K, un diámetro interior d_i = 10 cm, y un diámetro exterior d_e = 12 cm. La tubería está situada en una habitación en la que la temperatura ambiental del aire es de 30°C, siendo el coeficiente de transferencia térmica convectiva entre la tubería y el aire h_C=15 W/m²°K.

Determinar la transferencia de calor para los siguientes casos:

a) La tubería no se encuentra aislada

b) La tubería se encuentra aislada y, para ello, se recubre con una capa de aislante de 5 cm de espesor, k_1=

0,20 W/m°K. Se admitirá que es despreciable la resistencia convectiva del vapor.

RESOLUCIÓN

a) Como el h_{Cvapor} es muy elevado, su resistencia convectiva R_1 será muy pequeña (despreciable), y podemos considerar que la temperatura interior del tubo coincide con la temperatura del vapor.

$$q = \frac{T_{vapor} - T_F}{R_1 + R_2 + R_3} = \left| R_1 = 0 \right| = \frac{T_{vapor} - T_F}{\frac{1}{2\pi k} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{2\pi r_e h_{cF}}} = \frac{110 - 30}{\frac{1}{2\pi \times 185} \ln \frac{6}{5} + \frac{1}{2\pi \times 0{,}06 \times 15}} =$$

$$= \frac{110 - 30}{1{,}568.10^{-4} + 0{,}1768} = 452 \ \frac{W}{m}$$

b) Tubería con revestimiento térmico:

$$q = \frac{T_{vapor} - T_F}{R_1 + R_2 + R_3^* + R_4} = \left| R_1 = 0 \right| = \frac{T_{vapor} - T_F}{\frac{1}{2\pi k} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{2\pi k^*} \ln \frac{r_3}{r_e} + \frac{1}{2\pi r_e h_{cF}}} =$$

$$= \frac{110 - 30}{\frac{1}{2\pi \times 185} \ln \frac{6}{5} + \frac{1}{2\pi \times 0{,}2} \ln \frac{11}{6} + \frac{1}{2\pi \times 0{,}11 \times 15}} = \frac{110 - 30}{1{,}568.10^{-4} + 0{,}4823 + 0{,}09645} = 138{,}2 \ \frac{W}{m}$$

Se observa que la presencia del aislamiento reduce la pérdida de calor en un 70%. En ambos casos se podía haber despreciado la resistencia térmica de la tubería de Al sin perder mucha exactitud en el cálculo de la transferencia de calor por unidad de tiempo.

****

II.7.- En la parte exterior de una caldera existe una temperatura de 80ºC. Para evitar accidentes se construye un muro que aisla la caldera del medio exterior, que se encuentra a 25ºC.

Las dimensiones de este muro son: Longitud 18 m; Altura = 8,50 m; Espesor = 0,40 m

Los coeficientes de transmisión de calor son: $h_{C\,aire\text{-}pared\ interior} = 8$ ***Kcal/m².h.ºC***

$h_{C\,aire\text{-}pared\ exterior} = 20$ ***Kcal/m².h.ºC***

La conductividad térmica del muro: k = 0,70 Kcal/m.h.ºC

Determinar

a) El número de calorías perdidas al exterior a través del muro

b) Se recubre exteriormente la pared con un material aislante, tanto por la parte que mira a la caldera, como la que da al medio exterior; su espesor es de 1 cm., y su conductividad térmica k*= 0,06 Kcal/m.h.ºC.¿Cuál será ahora la cantidad de calor cedida al exterior?

RESOLUCIÓN

a) Número de calorías perdidas al exterior a través del muro

$$Q = S \ \frac{T_{ext.\ caldera} - T_{medio\ exterior}}{\frac{1}{h_{C(aire\text{-}pared\ interior)}} + \sum \frac{e}{k} + \frac{1}{h_{C(aire\text{-}pared\ exterior)}}} = (18 \times 8{,}5)\ m^2 \ \frac{80 - 25}{\frac{1}{8} + \frac{0{,}4}{0{,}70} + \frac{1}{20}} = 11.273{,}7 \ \frac{Kcal}{hora}$$

b) Calor cedido al exterior si se recubre exteriormente la pared con un material aislante (k*= 0,06 Kcal/m.h.ºC.), de 1 cm de espesor, tanto por la parte que mira a la caldera, como la que da al medio exterior

$$Q = (18 \times 8{,}5)\ m^2 \ \frac{80 - 25}{\frac{1}{8} + \frac{0{,}02}{0{,}06} + \frac{0{,}4}{0{,}7} + \frac{1}{20}} = 7793{,}4 \ \frac{Kcal}{hora}$$

****

II.8.- Por una tubería de plástico k = 0,5 W/m°K circula un fluido de modo que el coeficiente de transferencia de calor por convección, fluido-pared es h_{cF}***=300 W/m²°K. La temperatura media del fluido es*** $T_F = 100$***°C. La tubería tiene un diámetro interior*** $d_i = 3$ ***cm, y un diámetro exterior*** $d_e = 4$ ***cm. Si la cantidad de calor que se transfiere a través de la unidad de longitud de tubería en la unidad de tiempo es de 500 W/m., calcular:***

a) La temperatura de la superficie exterior de la tubería

b) El coeficiente de transferencia térmica global, tomando como referencia la superficie exterior de la tubería

---

RESOLUCIÓN

a) Temperatura de la superficie exterior de la tubería:

$$q = \frac{T_F - T_{pF}}{\frac{1}{2\,\pi k}\ln\frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{2\,\pi r_i\, h_{cF}}} \qquad 500\,\frac{W}{m} = \frac{100 - T_{pF}}{\frac{1}{2\,\pi \times 0{,}5}\ln\frac{2}{1{,}5} + \frac{1}{2\,\pi \times 0{,}015 \times 300}} \qquad T_{pF} = 36{,}5ºC$$

b) El coeficiente global de transmisión de calor U, basado en la superficie exterior de la pared A_e, es de la forma:

$$U_e = \frac{1}{\frac{A_e}{2\,\pi k L}\ln\frac{r_e}{r_i} + \frac{A_e}{2\,\pi r_i\, L\, h_{cF}}} = \left| \begin{array}{c} A_e = 2\,\pi r_e\, L \\ L = 1\text{ m} \end{array} \right| = \frac{1}{\frac{2\,\pi r_e\, L}{2\,\pi k L}\ln\frac{r_e}{r_i} + \frac{2\,\pi r_e\, L}{2\,\pi r_i\, L\, h_{cF}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{r_e}{k}\ln\frac{r_e}{r_i} + \frac{r_e}{r_i\, h_{cF}}} = \frac{1}{\frac{0{,}02}{0{,}5}\ln\frac{0{,}02}{0{,}015} + \frac{0{,}02}{0{,}015 \times 300}} = 62{,}69\,\frac{W}{m^2\,ºK}$$

Comprobación: $q = U_e\, A_e\, (T_F - T_{pF}) = 62{,}69 \times 2\,\pi \times 0{,}02\,(100 - 36{,}53) = 500\,\frac{W}{m}$

****

II.9.- Un conductor eléctrico de 1 mm de diámetro, se recubre con una capa de un aislante plástico de espesor e = 2 mm, k_1 = 0,5 W/m°C. El hilo está rodeado de aire con una temperatura ambiental T_F = 25°C y un coeficiente de convección h_C = 10 W/m²°K siendo la temperatura del conductor de 100°C.
Determinar
a) El calor disipado por unidad de tiempo, con aislamiento y sin él.
b) La temperatura exterior del aislamiento
Se supondrá que la temperatura del hilo no se ve afectada por la presencia del aislamiento.

RESOLUCIÓN

a.1) Calor transferido por unidad de longitud, con aislamiento:

$r_0 = r_{núcleo}$ + espesor aislamiento = $(0{,}5.10^{-3}) + (2.10^{-3}) = 2{,}5.10^{-3}$ metros

N° de Biot: $Bi = \frac{h_{c0}\, r_0}{k_1} = \frac{10 \times \{2{,}5 \times 10^{-3}\}}{0{,}5} = 0{,}05 < 0{,}1$ (R.T.D.)

Como Bi < 1, la presencia del aislamiento aumenta la transferencia de calor del hilo.

$$r_C = \frac{k_1}{h_{c0}} = \frac{0{,}5\text{ W/mºK}}{10\text{ W/m}^2\,ºK} = 0{,}05\text{ m}$$

La cantidad de calor transferida por unidad de longitud, en la unidad de tiempo, es:

$$q = \frac{T_{pi} - T_F}{\frac{1}{2\,\pi k_1}\ln\frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{2\,\pi r_0\, h_{c0}}} = \frac{100 - 25}{\frac{1}{2\,\pi \times 0{,}5}\ln\frac{2{,}5}{0{,}5} + \frac{1}{2\,\pi \times 2{,}5.10^{-3} \times 10}} = 10{,}9\,\frac{W}{m}$$

a.2) Calor transferido por unidad de longitud, sin aislamiento:

$$q = h_{c0}\,\frac{A_i}{L}\,(T_{pi} - T_F) = 10\,\{\frac{2\,\pi \times 0{,}0005\, L}{L}\}\,(100 - 25) = 2{,}36\,\frac{W}{m}$$

La adición del aislamiento disipa 4,6 veces más calor que sin aislamiento.

b) Temperatura en el exterior del aislamiento:

$$q = 10{,}9\,\frac{W}{m} = h_{c0}\,\frac{A_e}{L}\,(T_{pe} - T_F) = 10\,\frac{2\,\pi \times 0{,}0025\, L}{L}\,(T_{pe} - 25) \qquad T_{pe} = 94{,}38ºC$$

****

II.10.- Determinar la corriente máxima que puede circular por un conductor de aluminio k = 204 W/m.ºC, desnudo y de 1 mm de diámetro, sin que su temperatura supere los 200°C. El hilo se supondrá colocado en el aire, con una temperatura ambiental de 25°C, siendo el coeficiente de transferencia térmica por convección-radiación entre el hilo y el aire h_C = 10 W/m²°K. Se supondrá que la resistencia eléctrica del hilo conductor es de 0,037 Ω/m.

RESOLUCIÓN

Distribución de temperaturas en el hilo:

$$T = T_F + \frac{E\, r_0}{2\, h_{cF}}\,\{1 + \frac{r_0\, h_{cF}}{2\, k} - \frac{r^2\, h_{cF}}{2\, k\, r_0}\}$$

Como T no debe sobrepasar los 200°C, implica que ésta será la $T_{máx}$ a considerar.

$$T_{máx} = T_F + \frac{E\, r_0}{2\, h_{cF}} \left(1 + \frac{r_0\, h_{cF}}{2\, k}\right) = \left| E = \frac{R\, I^2}{Volumen} = \frac{R\, I^2}{A\, L} = \frac{R\, I^2}{\pi r_0^2\, L} \right| = T_F + \frac{R\, I^2}{2\, \pi r_0\, L\, h_{cF}} \left(1 + \frac{r_0\, h_{cF}}{2\, k}\right)$$

$$200 = 25 + \frac{0{,}037\ W \times I^2\ (Amp)^2}{2\, \pi \times 0{,}5.10^{-3} \times 1\ m^2 \times 10\ (W/m^2\ ºC)} \left(1 + \frac{0{,}5.10^{-3}\ m \times 10\ (W/m^2\ ºC)}{2 \times 204\ (w/mºC)}\right) = 25 + 1{,}1775\ I^2$$

de la que se deduce el valor: I = 12,2 A

Se ha hecho uso del siguiente ajuste de unidades:

$$\frac{R\, I^2}{r_0\, L\, h_{cF}} = \left| 1\ \Omega = \frac{1\ V}{1\ A} = 1\ \frac{W}{A^2}\ \ ;\ \ 1\ V = \frac{1\ W}{1\ A} = 1\ A\ \Omega\ \ ;\ \ 1\ \Omega\ A^2 = 1\ W \right| = \frac{\Omega\, A^2}{m.m\ \dfrac{W}{m^2\ ºC}} = \frac{W}{m^2\ \dfrac{W}{m^2\ ºC}} = ºC$$

****

II.11.- Un cable eléctrico se encuentra aislado por una vaina de recubrimiento de un material de conductividad térmica k = 0,5 Kcal/h.m°C, y éste a su vez está situado en un ambiente formado por un fluido que presenta un coeficiente de película h_C = 10 Kcal/h.m²°C. El diámetro del cable es de 10 mm.

Determinar

a) El espesor del material de recubrimiento que producirá el máximo flujo de calor

b) Si el recubrimiento está formado por capas de 10 mm de espesor, el número de estas capas necesarias para que el flujo de calor deje de ser máximo

---

RESOLUCIÓN

a) Un flujo de calor máximo Bi = 1 , ó un radio de aislamiento ($r_C = k_1/h_{cF}$) por lo que:

$r_C = \frac{k_1}{h_{cF}} = \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05$ m un espesor de material de recubrimiento de: 50 mm - 5 mm = 45 mm

b) N° de capas para que el flujo de calor deje de ser máximo: $\frac{45}{10} = 4{,}5 \rightarrow$ 5 capas

****

II.12.- Una pared plana de 2 cm de espesor genera uniformemente un calor E = 5x10⁵ Kcal/h.m³. La conductividad térmica del material se supone constante de valor k = 2 Kcal/h.m°C. La pared se encuentra rodeada de un fluido a 20°C y coeficiente de película de 50 Kcal/h.m²°C.

Determinar:

a) La distribución de temperaturas en el interior del sólido y calcular la temperatura en el plano de simetría y en la superficie exterior de la pared.

b) El flujo térmico al exterior

c) El espesor que debería tener la pared para la energía E generada, si la temperatura máxima que admite el material es de 175°C

RESOLUCIÓN

a) Distribución de temperaturas en el interior del sólido y calcular la temperatura en el plano de simetría y en la superficie exterior de la pared.

$$T_{máx} = T_F + \frac{E\, L}{k} \left(\frac{L}{2} - \frac{x^2}{2\, L} + \frac{k}{h_{cF}}\right) = T_{máx} - \frac{E\, x^2}{2\, k} = T_1 + \frac{E}{2\, k} (L^2 - x^2)$$

$$T = 20 + \frac{5.10^5 \times 0{,}01}{2} \left(\frac{0{,}01}{2} - \frac{x^2}{2 \times 0{,}01} + \frac{2}{50}\right) = 132{,}5 - 1{,}25.10^5\, x^2$$

Para: $\begin{cases} x = 0\ ,\ T = T_{máx} = 132{,}5ºC \\ x = 0{,}01\ ,\ T = T_1 = 132{,}5 - (1{,}25.10^5 \times 0{,}01^2) = 120ºC \end{cases}$

b) Flujo de calor al exterior

$$\frac{Q}{A} = 2\ E\ L = 2 \times 5.10^5 \times 0{,}01 = 10^4\ \frac{Kcal}{h\ m^2}$$

c) Espesor de la pared si la energía generada fuese tal que provocase una $T_{máx}$= 175°C, (x = 0)

$$175 = 20 + \frac{5.10^5\, L}{2} \left(\frac{L}{2} - 0 - \frac{2}{50}\right) = 20 - 1{,}25.10^5\, L^2 + 10000\, L \qquad L = 0{,}01329\ m$$

Espesor: $e = 2\,L = 2 \times 0{,}01329 = 0{,}02658$ m

****

II.13.- El muro de un edificio consiste en, a) Una capa exterior de ladrillo de revestimiento k_1 = 1,1 Kcal/h.m°C de 10 cm de espesor; b) Una capa de ladrillo corriente k_2 = 0,6 Kcal/h.m°C de 15 cm de espesor; c) Una capa de enlucido k_3= 0,4 Kcal/h.m°C de 0,125 cm de espesor. Sabiendo que en el exterior circula aire a una velocidad de 16 Km/hora y temperatura T_e = 35°C, y que el aire del interior se encuentra a una temperatura T_i = 22°C con un h_{ci} = 6,8 Kcal/h.m²°C, determinar la temperatura de la pared revocada con yeso sabiendo que para placa plana y fluido aire

$Nu = 0{,}0288\, Re^{0,8}\, Pr^{0,33}$ y Pr_{aire}= 0,71

RESOLUCIÓN

En Tablas se encuentra que:

$\nu_{\text{aire a 35°C}} = 17{,}46 \cdot 10^{-6}$ m²/seg ; $k_{\text{aire a 35°C}} = 0{,}0268$ W/m°K

$$Re = \frac{L\,u}{\nu} = \frac{1\text{ m }(16000\text{ m}/3600\text{ seg})}{17{,}46 \cdot 10^{-6}\,(\text{m}^2/\text{seg})} = 254550$$

$$Nu = 0{,}0288 \times 254550^{0,8} \times 0{,}71^{0,33} = 543{,}16$$

$$h_{ci} = \frac{Nu\,k_{Fi}}{L} = \frac{543{,}16 \times 0{,}0268}{1} = 14{,}556\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{ºC}} = \left|\,1\,\frac{\text{Kcal}}{\text{hora}} = 1{,}163\text{ W}\,\right| = 12{,}55\,\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2\,\text{ºC}}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{T_e - T_i}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = \frac{35 - 22}{\dfrac{1}{12{,}55} + \dfrac{0{,}1}{1{,}1} + \dfrac{0{,}15}{0{,}6} + \dfrac{0{,}0125}{0{,}4} + \dfrac{1}{6{,}8}} = \frac{13}{0{,}5989} = 21{,}70\,\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2}$$

Temperatura de la pared revocada con yeso:

$$\frac{q}{A} = 6{,}8\,(T_{pi} - 22) = 21{,}70\,\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2}\ ;\ T_{pi} = 25{,}2°\text{C}$$

****

II.14.- Sea una pared compuesta de dos capas de 20 cm de espesor de forma que uno de sus lados está completamente aislado, a la temperatura de 50°C.

Sabiendo que las conductividades térmicas de las capas son de 15 y 20 W/m°C y que la primera genera calor a razón de 1000 W/m³, determinar las temperaturas en la unión de las paredes y en la pared exterior

---

RESOLUCIÓN

a) Temperaturas en la unión de las paredes y en la pared exterior

Régimen permanente

Pared aislada térmicamente; todo el calor sale por la otra pared

PRIMERA PARED

Distribución de temperaturas: $T_1(x) = -\dfrac{E\,x^2}{2\,k} + C_1\,x + C_2$

Flujo de calor:

$$q_1 = -k\,\frac{\partial T}{\partial x} = k\,\frac{E\,x}{k} - k\,C_1 = E\,x - k\,C_1 = \left|\ \text{Para } x = 0\ \ \begin{cases} T_{x=0} = 50\text{ºC}\ ;\ 50\text{ ºC} = -0 + 0 + C_2\ ;\ C_2 = 50\text{ºC} \\ \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0\ ;\ 0 - k\,C_1 = 0\ ;\ C_1 = 0 \end{cases}\right| =$$

$$= E\,x = 1000\,x \quad \text{(Varía con la distancia x)}$$

$$T_1(x) = -\frac{E\,x^2}{2\,k} + 50$$

SEGUNDA PARED

Distribución de temperaturas:

$$T_2(x) = C_3\,x + C_4 = \left|\begin{array}{lll} \text{Para: } x = 0{,}2 & q_{1_{x=0,2}} = q_2 & 1000 \times 0{,}2 = -20\,C_3 \qquad C_3 = -10\text{ ºC} \\ T_{1_{x=0,2}} = T_{2_{x=0,2}} & \dfrac{-0{,}2^2\,E}{2 \times 15} + 50 = C_3\,x + C_4 = -(10 \times 0{,}2) + C_4 & C_4 = 50{,}67 \end{array}\right| =$$

$$= -10\,x + 50{,}67$$

Flujo de calor: $q_2 = -k'\dfrac{\partial T}{\partial x} = -k'C_3$

Flujo de calor: $q_2 = - k' \frac{\partial T}{\partial x} = - k' C_3 = - 20 \times (- 10) = 200 \; (W/m^2)$

a) Temperatura en la unión de las paredes

$T_{1(x=0,2)} = T_{2(x=0,2)} = - 10 x + 50,67 = - (10 \times 0,2) + 50,67) = 48,67°C$

b) Temperatura en el extremo no aislado

$T_{2(x=0,4)} = - 10 x + 50,67 = - (10 \times 0,4) + 50,67) = 46,67°C$

****

II.15.- Una tubería de hierro de d_e = 102 mm y d_i = 92 mm, k = 50 Kcal/h.m°C de una instalación de calefacción, conduce agua a 90°C, atravesando un local cuya temperatura es de 15°C. La tubería está aislada con una coquilla de material aislante de e = 25 mm y k* = 0,04 Kcal/h.m°C, envuelta en carbón asfáltico de 5 mm de espesor y k´ = 0,12 Kcal/h.m°C.

h_{cF} = 1000 Kcal/h.m²°C; h_{ce} = 8 Kcal/h.m²°C

Determinar:

a) La pérdida horaria de calor por metro lineal de tubería

b) El coeficiente global de transmisión de calor U.

c) Las temperaturas superficiales de la tubería aislada y del interior de la tubería

d) Comparar los resultados obtenidos con los correspondientes a la pared desnuda

---

RESOLUCIÓN

a) Pérdida de calor horaria por metro lineal de tubería

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi (T_{agua} - T_{ext})}{\frac{1}{r_1 h_{cF}} + \frac{1}{k} \ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{k^*} \ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{k´} \ln\frac{r_4}{r_3} + \frac{1}{r_4 h_{ce}}} = \frac{2\pi (T_{agua} - T_{ext})}{\frac{1}{r_1 h_{cF}} + \frac{1}{k_{12}} \ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{k_{23}} \ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{k_{34}} \ln\frac{r_4}{r_3} + \frac{1}{r_4 h_{ce}}} =$$

$$= \frac{2\pi (90 - 15)}{\frac{1}{0,046 \times 1000} + \frac{1}{50} \ln\frac{51}{46} + \frac{1}{0,04} \ln\frac{76}{51} + \frac{1}{0,12} \ln\frac{81}{76} + \frac{1}{0,081 \times 8}} = 39,04 \frac{Kcal}{h\,m}$$

b) Coeficiente global de transmisión de calor U, referido a la sección exterior 2 π r_4 L

$$U_{(r=r_4)} = \frac{1}{\frac{r_4}{r_1 h_{cF}} + \frac{r_4}{k_{12}} \ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_4}{k_{23}} \ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{r_4}{k_{34}} \ln\frac{r_4}{r_3} + \frac{1}{h_{ce}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{0,081}{0,046 \times 1000} + \frac{0,081}{50} \ln\frac{51}{46} + \frac{0,081}{0,04} \ln\frac{76}{51} + \frac{0,081}{0,12} \ln\frac{81}{76} + \frac{1}{8}} = 1,023 \frac{Kcal}{h\,m^2\,ºC}$$

c) Temperatura de la pared interior-fluido caliente:

$$\frac{q}{L} = 2\pi r_1 h_{cF} (T_F - T_{pF}) = 39,04 \text{ Kcal} \qquad T_{pF} = T_F - \frac{39,04}{2\pi r_1 h_{cF}} = 90ºC - \frac{39,04}{2\pi \times 0,046 \times 1000} = 89,86ºC$$

Temperatura de la pared exterior-fluido exterior:

$$\frac{q}{L} = 2\pi r_4 h_{ce} (T_{pe} - T_e) \qquad T_{pe} = T_e + \frac{q/L}{2\pi r_4 h_{ce}} = 15 - \frac{39,04}{2\pi \times 0,081 \times 8} = 24,6ºC$$

d) Comparar los resultados con los correspondientes a la pared desnuda:

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi (T_F - T_e)}{\frac{1}{r_1 h_{cF}} + \frac{1}{k_{12}} \ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{r_2 h_{ce}}} = \frac{2\pi (90 - 15)}{\frac{1}{0,046 \times 1000} + \frac{1}{50} \ln\frac{51}{46} + \frac{1}{0,051 \times 8}} = 190,4 \frac{Kcal}{h\,m}$$

$$U = \frac{1}{\frac{r_2}{r_1 h_{cF}} + \frac{r_2}{k_{12}} \ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_{ce}}} = \frac{1}{\frac{0,051}{0,046 \times 1000} + \frac{0,051}{50} \ln\frac{51}{46} + \frac{1}{8}} = 7,92 \frac{Kcal}{h\,m^2\,ºC}$$

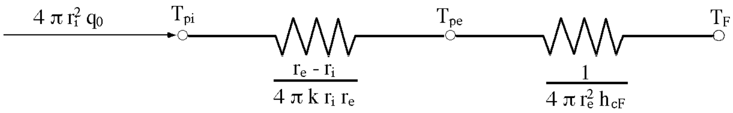
$$T_1 = T_F - \frac{q/L}{2\pi r_1 h_{cF}} = 90 - \frac{190,4}{2\pi \times 0,046 \times 1000} = 89,34ºC$$

$$T_2 = T_e - \frac{q/L}{2\pi r_2 h_{ce}} = 15 - \frac{190,4}{2\pi \times 0,051 \times 8} = 89,27ºC$$

****

II.16.- Una esfera hueca de radio interior r_i y radio exterior r_e está calentada eléctricamente por la pared interior a razón de q_0 W/m². Por la pared exterior se disipa el calor a un fluido que se encuentra a T_F, siendo h_{cF} el coeficiente de transmisión de calor por convección-radiación y k la conductividad térmica del sólido. Determinar las temperaturas T_{pi} y T_{pF} sabiendo que r_i = 3 cm, r_e = 5 cm, h_{cF} = 400 W/m²ºC, T_F = 100ºC, k = 15 W/mºC, $q_0 = 10^5$ W/m².

RESOLUCIÓN



$$4 \pi r_i^2 q_0 = \frac{T_{pi} - T_{pF}}{\frac{r_e - r_i}{4 \pi k r_i r_e}} = \frac{T_{pF} - T_F}{\frac{1}{4 \pi r_e^2 h_{cF}}} = \frac{T_{pi} - T_F}{\frac{r_e - r_i}{4 \pi k r_i r_e} + \frac{1}{4 \pi r_e^2 h_{cF}}}$$

$$T_{pi} = T_F + 4 \pi r_i^2 q_0 \left(\frac{r_e - r_i}{4 \pi k r_i r_e} + \frac{1}{4 \pi r_e^2 h_{cF}}\right) =$$

$$T_{pi} = T_F + 4 \pi r_i^2 q_0 \left(\frac{r_e - r_i}{4 \pi k r_i r_e} + \frac{1}{4 \pi r_e^2 h_{cF}}\right) = T_F + q_0 \left(\frac{r_i (r_e - r_i)}{k r_e} + \frac{r_i^2}{r_e^2 h_{cF}}\right) =$$

$$= 100 + 10^5 \left(\frac{0{,}03\ (0{,}05 - 0{,}03)}{15 \times 0{,}05} + \frac{0{,}03^2}{0{,}05^2 \times 400}\right) = 270ºC$$

De la ecuación: $4 \pi r_i^2 q_0 = \dfrac{T_{pF} - T_F}{1/4 \pi r_e^2 h_{cF}}$, se obtiene T_{pF} :

$$T_{pF} = T_F + \frac{4 \pi r_i^2 q_0}{4 \pi r_e^2 h_{cF}} = T_F + \frac{r_i^2 q_0}{r_e^2 h_{cF}} = 100 + \frac{0{,}03^2 \times 10^5}{0{,}05^2 \times 400} = 190ºC$$

****

II.17.- La sección recta de una pared prismática tiene de dimensiones, 1 x 0,5 m².
Determinar:
a) La distribución de temperaturas, sabiendo que para, y = 0, la temperatura correspondiente es de 100°C. El resto de los lados está a 0°C
b) Temperatura en el centro

RESOLUCIÓN
a) Distribución de temperaturas

$$T = 2\ T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sh\ \frac{\pi n (b - y)}{a}}{Sh\ \frac{\pi n b}{a}} \ \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \ sen\ \frac{\pi n x}{a} = 4\ T_0 \sum_{n=1,3,...}^{\infty} \frac{Sh\ \frac{\pi n (b - y)}{a}}{Sh\ \frac{\pi n b}{a}} \ \frac{sen\ \frac{\pi n x}{a}}{\pi n} =$$

$$= 4 \times 100 \sum_{n=1,3,...}^{\infty} \frac{Sh\ \frac{\pi n (0{,}5 - y)}{1}}{Sh\ \frac{\pi n\ 0{,}5}{1}} \ \frac{sen\ \frac{\pi n x}{1}}{\pi n} = 127{,}3 \sum_{n=1,3,...}^{\infty} \frac{Sh\ \{\pi n\ (0{,}5 - y)\}}{Sh\ (0{,}5\ \pi n)} \ \frac{sen\ (\pi n x)}{n}$$

b) Temperatura en el centro: x = 0,5 m; y = 0,25 m

T_{centro} =

$$= 127{,}3\ \left\{\frac{Sh\ (\pi \times 0{,}25)}{Sh\ (\pi \times 0{,}5)} \frac{sen(\pi \times 0{,}5)}{1} + \frac{Sh\ (\pi \times 3 \times 0{,}25)}{Sh\ (\pi \times 3 \times 0{,}5)} \frac{sen(\pi \times 3 \times 0{,}5)}{3} + \frac{Sh\ (\pi \times 5 \times 0{,}25)}{Sh\ (\pi \times 5 \times 0{,}5)} \frac{sen(\pi \times 5 \times 0{,}5)}{5} + ...\right\} =$$

$$= 127{,}3\ (0{,}373 - 0{,}0313 + 0{,}00393 - ... = 44{,}4°C$$

****

II.18.- Para determinar la temperatura de un fluido que circula por el interior de una tubería recubierta de aislante, se ha dispuesto una soldadura de un termopar directamente sobre el tubo, bajo el aislante. El material del tubo es de un metal cuya conductividad térmica tiene un valor de 40 Kcal/h.m°C, mientras que la del aislante es de 0,04

W/m°C, siendo las dimensiones, r_1= 25 mm; r_2= 28 mm; r_3= 100 mm. La medida efectuada con el termopar es de T_2 = - 40°C, siendo las propiedades del fluido en estas condiciones las siguientes:

$$k_F = 0{,}2\ \frac{Kcal;}{h.m°C}\ ;\ \rho_F = 1{,}25\ \frac{Kg}{dm^3}\ ;\ c_{pF} = 0{,}3\ \frac{Kcal}{Kg\ °C}\ ;\ \eta = 0{,}001\frac{N\ seg}{m^2} = 0{,}001\frac{Kg}{seg\ m}$$

Si el fluido no cambia de estado y su velocidad de circulación es de 1 m/seg, se desea obtener:

a) El coeficiente de película existente entre el fluido y la pared interna

b) Si el coeficiente de película exterior es de 10 Kcal/h.m².°C, ¿Cuál será el coeficiente global de transmisión referido a la superficie externa?

c) Flujo térmico por unidad de longitud sobre la superficie externa, sabiendo que T_e=20°C

d) Temperatura de la superficie exterior

e) Error cometido en la lectura al situar el termopar en (2) y no en (1)

RESOLUCIÓN

a) Coeficiente de película existente entre el fluido y la pared interna

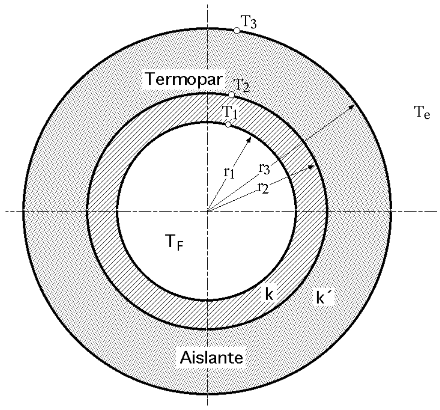
$$Re = \frac{u\ d_1}{\nu} = \left|\ \nu = \frac{0{,}001\ kg/seg.m}{1{,}25.10^3\,(kg/m^3)} = 8.10^{-7}\,\frac{m^2}{seg}\ \right| = \frac{1\ (m/seg) \times 0{,}05\ m}{8.10^{-7}\ (m^2/seg)} = 62500 \quad \text{(Rég. turbulento)}$$

$$Pr = \frac{h\ c_{pF}}{k} = \frac{0{,}001\ (kg/seg.m) \times 0{,}3\ (Kcal/kg.°C)}{0{,}2\ (Kcal/h.m.seg)} \times 3600\ \frac{seg}{hora} = 5{,}4$$

Como este fluido se calienta, la ecuación de Dittus Boelter toma la forma:

$$Nu = 0{,}023\ Re^{0{,}8}\ Pr^{0{,}4} = 0{,}023 \times 62500^{0{,}8} \times 5{,}4^{0{,}4} = 310$$

$$h_{cF} = \frac{Nu\ k}{d_1} = \frac{310 \times 0{,}2\ \frac{Kcal}{h.m.°C}}{0{,}05\ m} = 1240\ \frac{Kcal}{h.m^2.°C}$$



b) Coeficiente global de transmisión referido a la superficie externa, si el coeficiente de película exterior es de 10 Kcal/h.m².°C:

$$q = 2\ \pi\, r_3\ h_{ce}\,(T_e - T_3) = \frac{2\ \pi\, k'\ (T_3 - T_2)}{\ln\,(r_3/r_2)} =$$

$$= \frac{2\ \pi\, k\ (T_2 - T_1)}{\ln\,(r_2/r_1)} = 2\ \pi\, r_1 h_{cF}\,(T_1 - T_F) =$$

$$= \frac{2\ \pi\,(T_e - T_F)}{\frac{1}{r_3\ h_{ce}} + \frac{1}{k'}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{k}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{r_1\ h_{cF}}} = 2\ \pi\,(r\ U)_3\,(T_e - T_F)$$

en la que hemos tomado como referencia la superficie exterior (3), por lo que:

$$U_3 = \frac{1}{\frac{1}{h_{ce}} + \frac{r_3}{k'}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{r_3}{k}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3}{r_1\ h_{cF}}} = \frac{1}{\frac{1}{11{,}627} + \frac{0{,}1}{0{,}04}\ln\frac{0{,}1}{0{,}025} + \frac{0{,}1}{46{,}5}\ln\frac{0{,}028}{0{,}025} + \frac{0{,}1}{1441{,}8 \times 0{,}025}} = 0{,}2815\ \frac{W}{m^2\ °C}$$

en la que se ha tenido en cuenta que:

$$h_{ce} = 10\ \frac{Kcal}{h\ m^2\ °C} = 10 \times \frac{4186}{3600}\ \frac{W}{m^2\ °C} = 11{,}627\ \frac{W}{m^2\ °C}$$

$$h_{cF} = 1240\ \frac{Kcal}{h\ m^2\ °C} = 1441{,}8\ \frac{W}{m^2\ °C}$$

$$k = 40\ \frac{Kcal}{h\ m\ °C} = 46{,}5\ \frac{W}{m\ °C}$$

c) Flujo térmico por unidad de longitud q sobre la superficie externa, sabiendo que T_e=20°C

Se puede calcular un coeficiente global parcial $U_3{*}$ que contemple únicamente la convección exterior y la conducción a través del aislante:

$$U_3^* = \frac{1}{\frac{1}{h_{ce}} + \frac{r_3}{k'}\ln\frac{r_3}{r_2}} = \frac{1}{\frac{1}{11{,}627} + \frac{0{,}1}{0{,}04}\ln\frac{0{,}1}{0{,}028}} = 0{,}3059\ \frac{W}{m^2\ °C}$$

$$q = 2\pi r_3 U_3^* (T_e - T_2) = 2\pi \times 0{,}1 \times 0{,}3059 \times \{20 - (-40)\} = 11{,}53 \frac{W}{m}$$

d) Temperatura de la superficie exterior

$$q = 2\pi r_3 h_{ce} (T_e - T_3) \qquad T_3 = T_e - \frac{q}{2\pi r_3 h_{ce}} = 20ºC - \frac{11{,}53}{2\pi \times 0{,}1 \times 11{,}627} = 18{,}42ºC$$

e) Error cometido en la lectura al situar el termopar en (2) y no en (1)

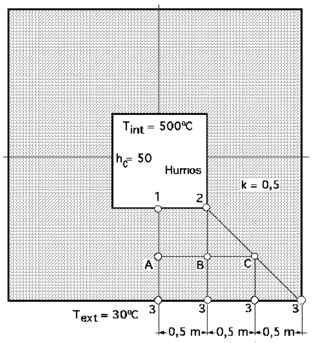
$$q = \frac{T_2 - T_1}{\dfrac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k}} = \frac{T_1 - T_F}{\dfrac{1}{h_{cF}\ 2\ \pi\ r_1}} = \frac{T_2 - T_F}{\dfrac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k} + \dfrac{1}{h_{cF}\ 2\ \pi\ r_1}}$$

$$T_2 - T_F = q\ \{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k} + \frac{1}{h_{cF}\ 2\ \pi\ r_1}\} = 11{,}53 \times \{\frac{\ln \frac{28}{25}}{2\pi \times 46{,}5} + \frac{1}{1441{,}8 \times 2\pi \times 0{,}025}\} = 0{,}137ºC$$

****

II.19.- Mediante los balances de energía necesarios, hallar la matriz de temperaturas correspondientes a los puntos A, B, C, (1) y (2), de la sección transversal de una chimenea, por cuyo interior circulan gases a 500ºC, estando la pared exterior a 30ºC, sabiendo que el coeficiente de película de los gases es de 50 W/m²·ºC, y la conductividad térmica del material de la chimenea, k = 0,5 W/m.ºC

RESOLUCIÓN

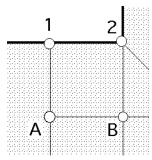


$$T_A = \frac{T_1 + 2\ T_B + T_3}{4} \quad ; \quad T_B = \frac{T_2 + T_A + T_C + T_3}{4} \quad ; \quad T_C = \frac{2\ T_B + 2\ T_3}{4} = \frac{T_B + T_3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1 + 2\ T_B + T_3 - 4\ T_A = 0 \\ T_2 + T_A + T_C + T_3 - 4\ T_B = 0 \\ T_B + T_3 = 2\ T_C \end{array}\right\}$$

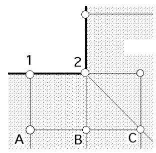
$$Bi = \frac{h_{cF}\ \Delta x}{k} = \frac{50 \times 0{,}5}{0{,}5} = 50$$

Cálculo de T_1:



$$\begin{cases} \dfrac{2\ T_2}{2} + T_A - (2 + Bi)\ T_1 + Bi\ T_F = 0 \qquad T_2 + T_A - (2 + 50)\ T_1 + (50 \times 500) = 0 \\ T_2 + T_A - 52\ T_1 + 25000 = 0 \end{cases}$$

Cálculo de T_2 :



$$\begin{cases} \dfrac{2\ T_1}{2} + 2\ T_B - (3 + Bi)\ T_2 + Bi\ T_F = 0 \qquad T_1 + 2\ T_B - 53\ T_2 + (500 \times 500) = 0 \\ T_1 + 2\ T_B - 53\ T_2 + 25000 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1 + 2\ T_B - 4\ T_A = -30 \\ 0 + T_2 + T_C - 4\ T_B + T_A = -30 \\ -2\ T_C + T_B = -30 \\ T_1 - 53\ T_2 + 2\ T_B = -25000 \\ -52\ T_1 - T_2 + T_A = -25000 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} T_1 = 494{,}84ºC \\ T_2 = 489{,}41ºC \\ T_A = 242{,}15ºC \\ T_B = 221{,}80ºC \\ T_C = 125{,}94ºC \end{array}\right.$$

****

II.20.- Determinar la distribución de temperaturas en régimen estacionario y las transferencias de calor por unidad de tiempo, procedentes de las cuatro superficies del cuerpo bidimensional de sección cuadrada indicado en la figura, k = 1 W/mºC, con E = 0. Dos de los límites son isotermos a T_B = 200°C y T_D = 100°C respectivamente, un tercero está aislado y el cuarto transfiere energía por convección a un fluido con h_C = 50 W/m²°C y T_F = 50°C.

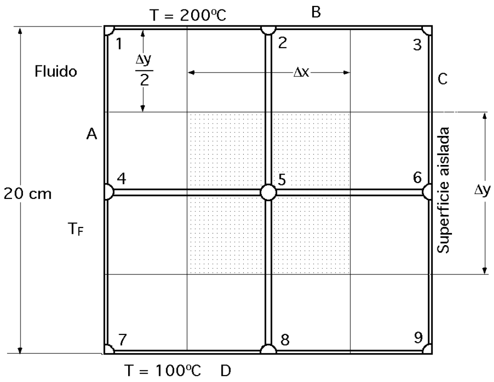
Dimensiones(20 x 20) cm.

a) Por el método numérico

b) Por el método de relajación

c) Por el método matricial
d) Por iteración

RESOLUCIÓN



a) Método numérico

Dividimos el cuerpo de forma que los nudos se numeren del 1 al 9 tal como se indica en la figura

Las celdillas son cuadradas con $\Delta x = \Delta y = 10$ cm

Los nudos 1, 2, 3, tienen una temperatura igual a $T_B = 200$ºC

Los nudos 7, 8, 9, tienen una temperatura igual a $T_D = 100$ºC

Los nudos 4, 5, 6, tienen temperaturas desconocidas

$$Bi = \frac{h_{cF}\ \Delta x}{k} = \frac{50 \times 0{,}1}{1} = 5$$

Nudo 5: $T_4 + T_2 + T_6 + T_8 - 4\ T_5 = 0 \qquad T_4 + 200 + T_6 + 100 - 4\ T_5 = 0 \qquad T_4 + T_6 - 4\ T_5 = -300$

El nudo 4 está situado en el borde por donde se transfiere calor por convección de modo que:

Nudo 4: $\dfrac{T_1 + T_7}{2} + T_5 + Bi\ T_F - (2 + Bi)\ T_4 = 0 \qquad \dfrac{200 + 100}{2} + T_5 + (5 \times 50) - (2 + 5)\ T_4 = 0 \qquad T_5 - 7\ T_4 = -400$

El nudo 6 está situado sobre el contorno aislado por lo que: $q_{3\to 6} + q_{5\to 6} + q_{9\to 6} = 0$

$$k\ \frac{\Delta x}{2}\ \frac{T_3 - T_6}{\Delta y} + k\ \Delta y\ \frac{T_5 - T_6}{\Delta x} + k\ \frac{\Delta x}{2}\ \frac{T_9 - T_6}{\Delta y} = 0 \qquad \frac{T_3 + T_9}{2} + T_5 - 2\ T_6 = 0$$

$$\frac{200 + 100}{2} + T_5 - 2\ T_6 = 0 \qquad T_5 - 2\ T_6 = -150$$

El sistema de ecuaciones queda en la forma:

$$\left.\begin{array}{l} T_4 + T_6 - 4\ T_5 = -300 \\ T_5 - 7\ T_4 = -400 \\ T_5 - 2\ T_6 = -150 \end{array}\right\} \qquad T_4 = 75{,}5ºC\ ;\ T_5 = 128{,}7ºC\ ;\ T_6 = 139{,}4ºC$$

Transferencia de calor por unidad de tiempo y por unidad de espesor del sólido desde la superficie A al fluido:

$$q_A = q_{F\to 1} + q_{F\to 4} + q_{F\to 7} = h_{CF}\ \Delta y\ \left\{\frac{T_F - T_1}{2} + (T_F - T_4) + \frac{T_F - T_7}{2}\right\} =$$

$$= (50 \times 0{,}1)\ \left\{\frac{50 - 200}{2} + (50 - 75{,}5) + \frac{50 - 100}{2}\right\} = -627\ \frac{W}{m}$$

El signo (-) indica que el calor se desprende del sólido

Transferencia de calor por unidad de tiempo y por unidad de espesor del sólido en la superficie B:

$$q_B = q_{1\to 4} + q_{2\to 5} + q_{3\to 6} + q_{1\to F} = k\ \Delta x\ \left\{\frac{T_1 - T_4}{2\ \Delta y} + \frac{T_2 - T_5}{\Delta y} + \frac{T_3 - T_6}{2\ \Delta y}\right\} + h_{cF}\ \frac{\Delta y}{2}\ (T_1 - T_F) = 538{,}8\ \frac{W}{m}$$

Transferencia de calor por unidad de tiempo y por unidad de espesor del sólido en la superficie C, (aislada):

$q_C = 0$

Transferencia de calor por unidad de tiempo y por unidad de espesor del sólido en la superficie D:

$$q_D = q_{7\to 4} + q_{8\to 5} + q_{9\to 6} + q_{7\to F} = k\ \Delta x\ \left\{\frac{T_7 - T_4}{2\ \Delta y} + \frac{T_8 - T_5}{\Delta y} + \frac{T_9 - T_6}{2\ \Delta y}\right\} + h_{cF}\ \frac{\Delta y}{2}\ (T_7 - T_F) = 88{,}8\ \frac{W}{m}$$

Comprobación:

$$q_{neta} = q_A + q_B + q_C + q_D = -627{,}5 + 538{,}8 + 0 + 88{,}8 = 0{,}1\ \frac{W}{m}$$

que es una muy buena aproximación.

b) Método de relajación

$$\left.\begin{array}{l} T_5 - 7\ T_4 + 400 = R_4 \\ T_4 + T_6 - 4\ T_5 + 300 = R_5 \\ T_5 - 2\ T_6 + 150 = R_6 \end{array}\right\}$$

Temperaturas que se pueden presuponer inicialmente: $T_4 = 80$ºC ; $T_5 = 100$ºC ; $T_6 = 150$ºC**,** de acuerdo con los límites extremos del problema: $T_F = 50ºC$ y $T_B = 200ºC$

Cálculo de los residuos en 1ª aproximación:

$$\left.\begin{array}{l} T_5 - 7\,T_4 + 400 = R_4 \\ T_4 + T_6 - 4\,T_5 + 300 = R_5 \\ T_5 - 2\,T_6 + 150 = R_6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} R_4 = 100 - (7 \times 80) + 400 = -60ºC \\ R_5 = 80 + 150 - (4 \times 100) + 300 = 130ºC \\ R_6 = 100 - (2 \times 150) + 150 = -50ºC \end{array}\right\}$$

Corrección de temperaturas.- Tomamos el mayor residuo en valor absoluto R_5 y aumentamos T_5, por ejemplo en 35ºC, $T_5 = 135ºC$, de forma que el residuo R_5 cambie de signo, por lo que los nuevos residuos serán:

$$\left.\begin{array}{l} T_4 = 80\ \ C \\ T_5 = 135\ \ C \\ T_6 = 150\ \ C \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} R_4 = 135 - (7 \times 80) + 400 = -25ºC \\ R_5 = 80 + 150 - (4 \times 135) + 300 = -10ºC \\ R_6 = 135 - (2 \times 150) + 150 = -15ºC \end{array}\right\}$$

Cálculo de los residuos en 2ª aproximación.- Tomamos el mayor residuo en valor absoluto R_4 y modificamos T_4 en una cantidad que haga R_4 positivo, por ejemplo disminuyendo T_4 en 4ºC, $T_4 = 76ºC$:

$$\left.\begin{array}{l} T_4 = 76\ \ C \\ T_5 = 135\ \ C \\ T_6 = 150\ \ C \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} R_4 = 135 - (7 \times 76) + 400 = +3ºC \\ R_5 = 76 + 150 - (4 \times 135) + 300 = -14ºC \\ R_6 = 135 - (2 \times 150) + 150 = -15ºC \end{array}\right\}$$

y así se obtienen los residuos en sucesivas aproximaciones:

Disminuimos T_6 en 10ºC: $\left\{\begin{array}{lll} T_4 = 76ºC & T_5 = 135ºC & T_6 = 140ºC \\ R_4 = 3 & R_5 = -24 & R_6 = 5 \end{array}\right.$

Disminuimos T_5 en 7ºC: $\left\{\begin{array}{lll} T_4 = 76ºC & T_5 = 128ºC & T_6 = 140ºC \\ R_4 = -4 & R_5 = 4 & R_6 = -2 \end{array}\right.$

Disminuimos T_4 en 1ºC: $\left\{\begin{array}{lll} T_4 = 75ºC & T_5 = 128ºC & T_6 = 140ºC \\ R_4 = 3 & R_5 = 3 & R_6 = -2 \end{array}\right.$

Aumentamos T_5 en 0,8ºC: $\left\{\begin{array}{lll} T_4 = 75ºC & T_5 = 128{,}8ºC & T_6 = 140ºC \\ R_4 = 3{,}8 & R_5 = -0{,}2 & R_6 = -1{,}2 \end{array}\right.$

Aumentamos T_4 en 0,55ºC: $\left\{\begin{array}{lll} T_4 = 75{,}55ºC & T_5 = 128{,}8ºC & T_6 = 140ºC \\ R_4 = -0{,}05 & R_5 = 0{,}35 & R_6 = -1{,}2 \end{array}\right.$

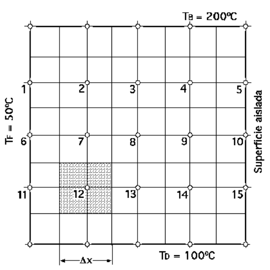
etc

c) Técnicas matriciales.- Se utilizará una red de 5 cm

Determinación de los valores de las matrices A y B

a) Todos los nudos interiores se resuelven de la misma forma, por ejemplo:

$$q_{3 \to 8} + q_{7 \to 8} + q_{13 \to 8} + q_{9 \to 8} = 0$$



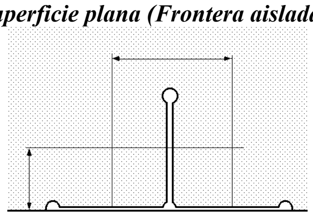
b) Las ecuaciones de los nudos que están en las superficies se determinan teniendo en cuenta los siguientes parámetros:

$$Bi = \frac{h_{cF}\ \Delta x}{k} = \frac{50 \times 0{,}05}{1} = 2{,}5$$

$(Bi)\ T_F = 2{,}5 \times 50 = 125ºC \quad ; \quad 2 + Bi = 4{,}5$

Los nudos situados en las superficies isotermas a T_B y T_D tienen temperaturas conocidas, quedando por determinar las temperaturas de los 15 nudos restantes

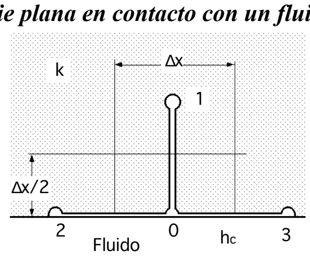
Superficie plana (Frontera aislada)



Frontera aislada

$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 - 2\,T_0 = 0$$

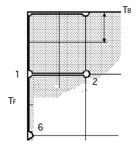
Superficie plana en contacto con un fluido a T_F



$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 + (Bi)\ T_F - (2 + Bi)\ T_0 = 0$$

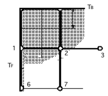
Nudo 1

$$\begin{cases} \dfrac{T_B + T_6}{2} + T_2 + 125 - 4{,}5\,T_1 = 0 \\ \dfrac{T_6}{2} + T_2 - 4{,}5\,T_1 = -225 \end{cases} \qquad \dfrac{200 + T_6}{2} + T_2 + 125 - 4{,}5\,T_1 = 0$$



Nudo 2

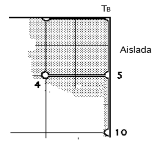
$$\begin{cases} T_1 + T_B + T_3 + T_7 - 4\,T_2 = 0 \\ T_1 - 4\,T_2 + T_3 + T_7 = -200 \end{cases} \qquad T_1 + 200 + T_3 + T_7 - 4\,T_2 = 0$$



Nudo 3 $T_2 - 4\,T_3 + T_4 + T_B = -200$ ***Nudo 4*** $T_3 - 4\,T_4 + T_5 + T_9 = -200$

Nudo 5

$$\begin{cases} \dfrac{T_B + T_{10}}{2} + T_4 - 2\,T_5 = 0 \\ T_4 - 2\,T_5 + \dfrac{T_{10}}{2} = -100 \end{cases} \qquad \dfrac{200 + T_{10}}{2} + T_4 - 2\,T_5 = 0$$



Nudo 6 $\dfrac{T_1 + T_{11}}{2} + T_7 + 125 - 4{,}5\,T_6 = 0$

Nudo 7 $T_2 + T_6 - 4\,T_7 + T_8 + T_{12} = 0$ ***Nudo 8*** $T_3 + T_7 - 4\,T_8 + T_9 + T_{13} = 0$

Nudo 9 $T_4 + T_8 - 4\,T_9 + T_{10} + T_{14} = 0$ ***Nudo 10*** $\dfrac{T_5 + T_{15}}{2} + T_9 - 2\,T_{10} = 0$

Nudo 11 $\dfrac{T_6}{2} - 4{,}5\,T_{11} + T_{12} = -175$ ***Nudo 12*** $T_7 + T_{11} - 4\,T_{12} + T_{13} = -100$

Nudo 13 $T_8 + T_{12} - 4\,T_{13} + T_{14} = -100$ ***Nudo 14*** $T_9 + T_{13} - 4\,T_{14} + T_{15} = -100$

Nudo 15 $\dfrac{T_{10}}{2} + T_{14} - 2\,T_{15} = -50$

Muchos de los elementos de la matriz A son cero, concentrándose los no nulos en las proximidades de la diagonal principal. Los elementos de la matriz B son las constantes de los segundos miembros.

Temperaturas							
(1) = 88,57	(2) = 138,9	(3) = 158,56	(4) = 166,3	(5) = 168,38	(6) = 69,3	(7) = 108,5	(8) = 129,00
(9) = 138,28	(10) = 140,9	(11) = 68,1	(12) = 96,83	(13) = 110,69	(14) = 116,9	(15) = 118,68	

c) Técnicas de iteración Para los datos del primer caso (método numérico)

Nudo 4 : $T_4 = \dfrac{400}{7} + \dfrac{T_5}{7}$; ***Nudo 5*** : $T_5 = \dfrac{300}{4} + \dfrac{T_4 + T_6}{4}$; ***Nudo 6*** : $T_6 = \dfrac{150}{2} + \dfrac{T_5}{2}$

Supondremos inicialmente que: $T_4 = 76$ ºC ; $T_5 = 135$ºC ; $T_6 = 150$ºC

1ª iteración
$$\begin{cases} T_4 = \dfrac{400}{7} + \dfrac{100}{7} = 71{,}43\text{ºC} \\ T_5 = \dfrac{300}{4} + \dfrac{71{,}43 + 150}{4} = 130{,}36\text{ºC} \\ T_6 = \dfrac{150}{2} + \dfrac{130{,}36}{2} = 140{,}18\text{ºC} \end{cases}$$

2ª iteración
$$\begin{cases} T_4 = \dfrac{400}{7} + \dfrac{130{,}66}{7} = 75{,}77\text{ºC} \\ T_5 = \dfrac{300}{4} + \dfrac{77{,}75 + 150}{4} = 128{,}98\text{ºC} \\ T_6 = \dfrac{150}{2} + \dfrac{128{,}98}{2} = 139{,}49\text{ºC} \end{cases}$$

3ª iteración
$$\begin{cases} T_4 = \dfrac{400}{7} + \dfrac{128{,}98}{7} = 75{,}57\text{ºC} \\ T_5 = \dfrac{300}{4} + \dfrac{75{,}57 + 139{,}49}{4} = 128{,}77\ \text{ºC} \\ T_6 = \dfrac{150}{2} + \dfrac{128{,}77}{2} = 139{,}38\text{ºC} \end{cases}$$

4ª iteración
$$\begin{cases} T_4 = \dfrac{400}{7} + \dfrac{128{,}77}{7} = 75{,}538\text{ºC} \\ T_5 = \dfrac{300}{4} + \dfrac{75{,}57 + 139{,}38}{4} = 128{,}737\text{ºC} \\ T_6 = \dfrac{150}{2} + \dfrac{128{,}737}{2} = 139{,}368\text{ºC} \end{cases}$$

5ª iteración
$$\begin{cases} T_4 = \dfrac{400}{7} + \dfrac{128{,}737}{7} = 75{,}534\text{ºC} \\ T_5 = \dfrac{300}{4} + \dfrac{75{,}538 + 139{,}368}{4} = 128{,}726\text{ºC} \\ T_6 = \dfrac{150}{2} + \dfrac{128{,}737}{2} = 139{,}368\text{ºC} \end{cases}$$

6ª iteración
$$\begin{cases} T_4 = \dfrac{400}{7} + \dfrac{128{,}726}{7} = 75{,}532\text{ºC} \\ T_5 = \dfrac{300}{4} + \dfrac{75{,}534 + 139{,}368}{4} = 128{,}725\text{ºC} \\ T_6 = \dfrac{150}{2} + \dfrac{128{,}726}{2} = 139{,}363\text{ºC} \end{cases}$$

que ya es una buena aproximación

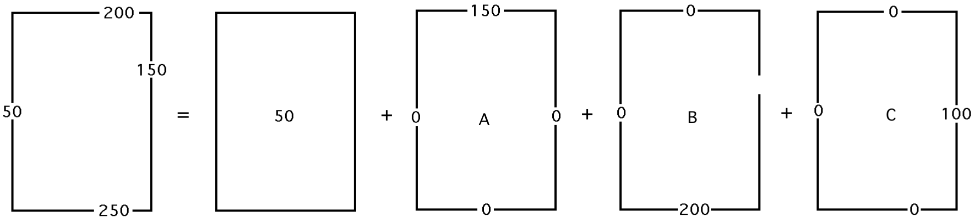
****

II.21.- Una placa sólida de sección rectangular de dimensiones (70 x 100) cm² y espesor infinito, tiene en régimen permanente las temperaturas en sus caras tal como se indica:
(x = 0; T = 50°C), (x = 70 cm; T = 150°C), (y = 0; T = 250°C), (y = 100 cm ; T = 200°C)
Determinar:
a) La distribución de temperaturas
b) Valor de la temperatura en el centro geométrico de la sección

---

RESOLUCIÓN

a) La configuración inicial se puede descomponer en otras más simples, método de superposición.



La distribución de temperaturas es de la forma: $T = 50 + T_A + T_B + T_C$

$$T_A = 2 \times 150 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sh} \frac{\pi n y}{70}}{\operatorname{Sh} \frac{\pi n 100}{70}} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{70}$$

$$T_B = 2 \times 200 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sh} \frac{\pi n (100-y)}{70}}{\operatorname{Sh} \frac{\pi n 100}{70}} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{70}$$

$$T_C = 2 \times 100 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sh} \frac{\pi n x'}{100}}{\operatorname{Sh} \frac{\pi n 70}{100}} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi n x'}{100}$$

$$T = 50 + \frac{4 \times 150}{\pi} \sum_{n=1,3,5,}^{\infty} \frac{\operatorname{Sh} \frac{\pi n y}{70}}{\operatorname{Sh} \frac{\pi n 100}{70}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi n x}{70}}{n} + \frac{4 \times 200}{\pi} \sum_{n=1,3,5,}^{\infty} \frac{\operatorname{Sh} \frac{\pi n (100-y)}{70}}{\operatorname{Sh} \frac{\pi n 100}{70}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi n x}{70}}{n} + \frac{4 \times 100}{\pi} \sum_{n=1,3,5,}^{\infty} \frac{\operatorname{Sh} \frac{\pi n y'}{100}}{\operatorname{Sh} \frac{\pi n 70}{100}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi n x'}{100}}{n}$$

b) Temperatura en el centro; hay que tener en cuenta que: $x= 35$; $y= 50$; $x'= 50$; $y'= 35$

Resolviendo se obtiene: $T_A = 20{,}03 - 0{,}076 + 0{,}0005 - ... = 19{,}95$

$T_B = 26{,}7 - 0{,}101 + 0{,}0007 - ... = 26{,}6$

$T_C = 38{,}17 - 1{,}57 + 0{,}104 - 0{,}0083 + 0{,}0007 -... = 36{,}699$

$T_{centro} = 50 + 19{,}95 + 26{,}6 + 36{,}699 = 133{,}25$

****

II.22.- Sea un cilindro macizo de 50 cm de radio y 50 cm de altura; la cara superior se encuentra a una temperatura doble que la superficie lateral, y la cara inferior se encuentra aislada térmicamente; en estas condiciones se sabe que la temperatura en el centro es de 120°C.
Determinar
a) La temperatura en la superficie lateral
b) La temperatura en la base aislada térmicamente

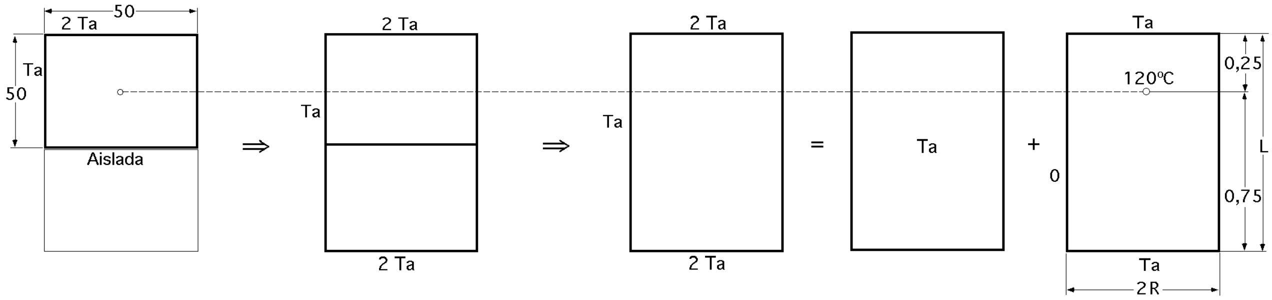
RESOLUCIÓN

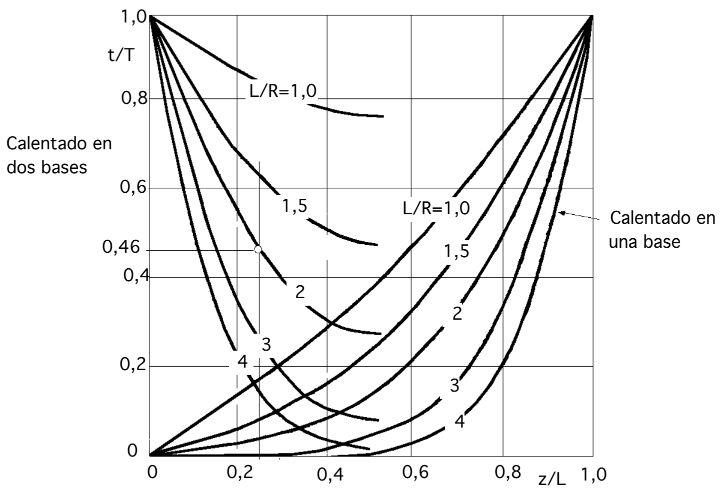
Al tener el cilindro una base aislada térmicamente, esto equivale a duplicar su longitud, y estudiar la distribución de temperaturas en un cilindro de longitud (0,50 x 2 = 1 m), y temperatura en las bases 2 T_A.

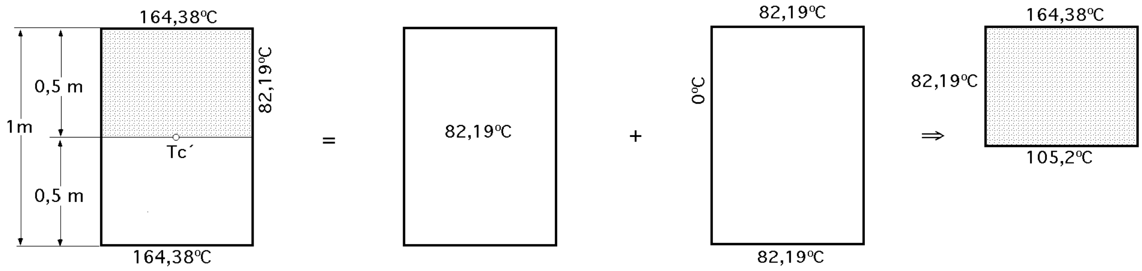
En estas condiciones, el nuevo cilindro se puede descomponer en otros dos, uno a temperatura uniforme T_A, y otro con temperatura en las bases T_A, y temperatura 0 en la superficie lateral.

Haciendo uso de la gráfica para cilindros con ambas bases a T_A, y teniendo en cuenta que:

$$\left\{ \begin{array}{l} L/R = 1/0{,}5 = 2 \\ z/L = 0{,}25/1 = 0{,}25 \end{array} \right. \qquad \frac{t}{T} = 0{,}46$$







resulta:

$120 = T_A + 0,46\ T_A = 1,46\ T_A$; $T_A = 82,19°C$; $2\ T_A = 2 \times 82,19 = 164,38°C$

b) Temperatura en la base aislada térmicamente: Es como hallar la temperatura $T_{C'}$ en el centro de la siguiente configuración, que a su vez se descompone en otras dos, una de temperatura uniforme 82,19°C, y otra con temperatura en las bases de 82,19°C y temperatura lateral 0°C. Por lo tanto, como:

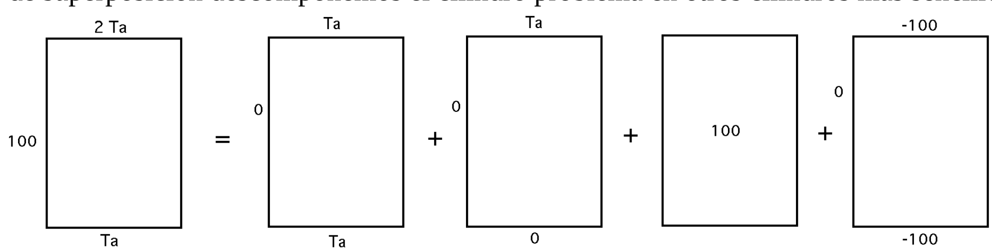
$$\left\{ \begin{array}{l} L/R = 1/0,5 = 2 \\ z/L = 0,5/1 = 0,5 \end{array} \right. \qquad \frac{t}{T} = 0,28\ , \quad \text{por lo que: } T_{C'} = 82,19 + (0,28 \times 82,19) = 105,2\ ºC$$

****

II.23.- Un cilindro macizo de 1 m de longitud y 0,5 m de radio se calienta de tal modo que su base superior posee una temperatura doble que la de su base inferior; la superficie lateral se encuentra a 100°C. En estas condiciones se ha medido la temperatura en el centro del cilindro obteniéndose un valor de 120°C. ¿Cuál es la temperatura de las bases?

RESOLUCIÓN

Por el principio de superposición descomponemos el cilindro problema en otros cilindros más sencillos:

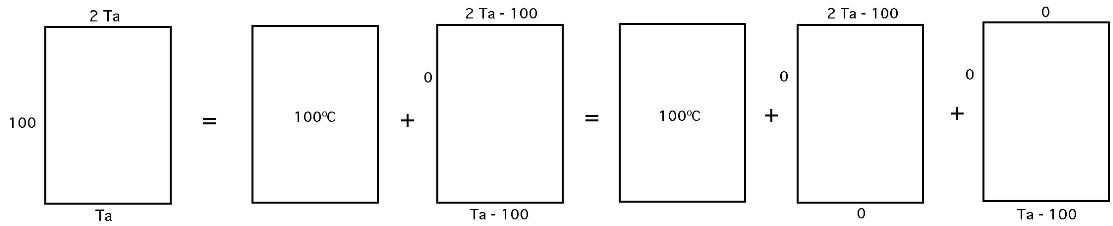


Mediante las gráficas para cilindros: $\begin{cases} \dfrac{L}{R} = \dfrac{1}{0,5} = 2 \\ \dfrac{z}{L} = 0,5 \text{ (centro)} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Cilindro calentado en ambos extremos: t/T = 0,28} \\ \text{Cilindro calentado en un extremo: t/T = 0,14} \end{cases}$

Como la temperatura en el centro es de 120°C, resulta:

$120 = 0,28\ T_a + 0,14\ T_a + 100 + 0,28\ (-100) = 0,42\ T_a + 72$; $T_a = 114,3°C$; $2\ T_a = 228,6°C$

De otra forma:



$120 = 0,14\ (Ta - 100) + 0,14\ (2\ Ta - 100) + 100 = 0,42\ Ta + 72$

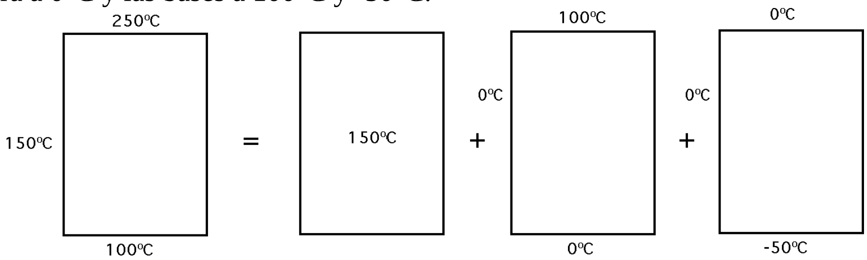
$T_a = 114,3°C$; $2\ T_a = 228,6°C$

****

II.24.- Un cilindro macizo de 10 cm de longitud y 20 cm de diámetro se calienta a 150°C en la superficie lateral, a 250°C en un extremo y a 100°C en el otro. ¿Cuál es la temperatura en el centro del cilindro?

RESOLUCIÓN

Se pueden restar 150°C a todas las temperaturas, con lo que el problema es equivalente al de un cilindro en el que la superficie se encuentra a 0°C y las bases a 100°C y -50°C.



Para el cilindro de base superior a 100°C, L/R = 1 ; z/L = 0,5, la gráfica, para el caso de cilindro calentado en una base, proporciona:

t/T = 0,385 ; t = 0,385 x T = 0,385 x 100 = 38,5°C

Para el cilindro de base inferior a -50°C, L/R = 1 ; z/L = 0,5, la gráfica, para el caso de cilindro calentado en una base, proporciona:

t/T = 0,385 ; t = 0,385 x T = 0,385 x (-50) = -19,25°C

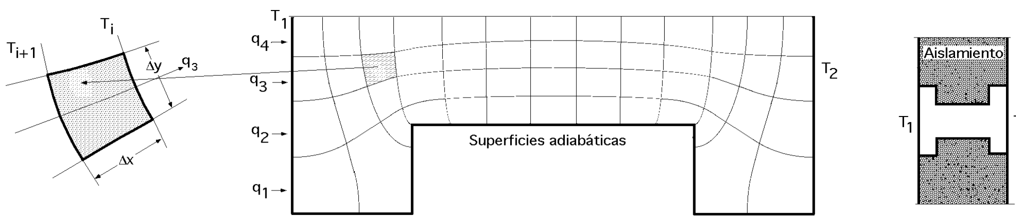
Al añadir los 150°C restados en un principio y superponer las dos soluciones, se obtiene:

$T_{centro} = 38,5 - 19,25 + 150 = 169,25°C$

****

II.25.- Determinar la transferencia de calor por unidad de tiempo a través de la viga de la figura, si $T_1 = 500°C$, $T_2 = 200°C$ y k = 70 W/m°K.

RESOLUCIÓN



En la viga se tiene que: M = 13 ; N = 4 ; $\Delta T_{global} = T_1 - T_2 = 500 - 300 = 300ºC$

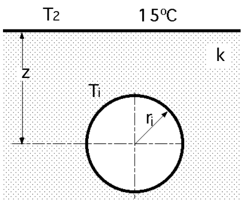
Como para determinar N sólo se ha considerado la mitad de la viga, la transferencia de calor en la unidad de tiempo a través de la unidad de espesor de la misma es:

$$Q = 2\ k\ \frac{N}{M}\ (T_1 - T_2) = 2 \times 70\ \frac{W}{m.ºK} \times \frac{4}{13} \times 300ºC = 12.923\ W/m$$

****

II.26.- Un tanque esférico de diámetro d=0,5 metros contiene materiales radiactivos y va enterrado en la tierra a una profundidad de 1,25 metros, medidos desde el centro de la esfera hasta la superficie del suelo. La superficie del tanque se mantiene a una temperatura uniforme T_1=100°C, consecuencia del proceso de radiación, mientras que la superficie de la tierra está a una temperatura de 15°C.
Sabiendo que la conductividad térmica de la tierra es de 0,8 W/m°C, determinar el calor generado en el tanque como consecuencia de los procesos radiactivos que acontecen en su interior.

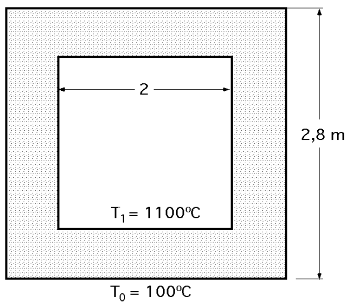
RESOLUCIÓN



$$F = \frac{4 \pi r_1}{1 - \dfrac{r_1}{2 z}} = | z >> r_i | = \frac{4 \pi \times 0{,}25}{1 - \dfrac{0{,}25}{2 \times 1{,}25}} = 3{,}49 \text{ metros}$$

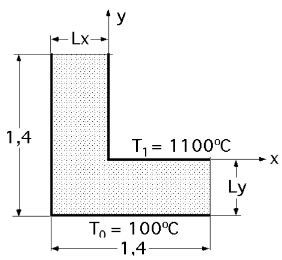
$$Q = F\, k\, (T_i - T_2) = 3{,}49 \text{ m} \times 0{,}8 \frac{W}{m.ºC} (100 - 15)ºC = 237{,}3 \text{ W}$$

****



II.27.- La sección recta de las paredes de un horno tiene la forma que se indica en la figura, en la que sus dimensiones exteriores son (2,8 x 2,8 m²), el espesor de las paredes L=40 cm, temperatura de las superficies interiores 1100°C, temperatura de las paredes exteriores 100°C, conductividad térmica k = 0,1 Kcal/h.m°C.
Determinar:
a) La distribución de temperaturas
b) El calor disipado al exterior

RESOLUCIÓN



Cálculo de la resistencia térmica:
Considerando un cuadrante y aplicando la ecuación de paredes en ángulo recto:
$L_x = L_y = \text{espesor} = e \;;\; x = 1{,}4 - e = 1{,}4 - 0{,}4 = 1$

$$R = \frac{1}{k \left(\dfrac{x}{L_y} + \dfrac{y}{L_x} + \dfrac{2}{\pi} \ln \dfrac{L_x^2 + L_y^2}{4 L_x L_y} \right) + \dfrac{2}{\pi} \dfrac{L_y}{L_x} \text{arc tg} \dfrac{L_x}{L_y} + \dfrac{2}{\pi} \text{arc tg} \dfrac{L_y}{L_x}} =$$

$$= \left| L_x = L_y \right| = \frac{1}{0{,}1 \times \left(2 \dfrac{x}{L_y} + \dfrac{2}{\pi} \ln 0{,}5 + 1\right)} = 1{,}8 \frac{h\, mºC}{Kcal}$$

Para 4 ángulos rectos:

$$R_{Total} = \frac{1}{4 \times 0{,}5558} \frac{Kcal}{h.m.ºC} = \frac{1}{2{,}2235} \frac{h.m.ºC}{Kcal}$$

a) Distribución de temperaturas

$$\text{Eje x} = T_1 - T_0 = \frac{x}{L_y} + \frac{1}{\pi} \{\ln \frac{L_x^2 + L_y^2}{4 L_x^2}) + 2 \frac{L_x}{L_y} \text{arc tg} \frac{L_y}{L_x}\}$$

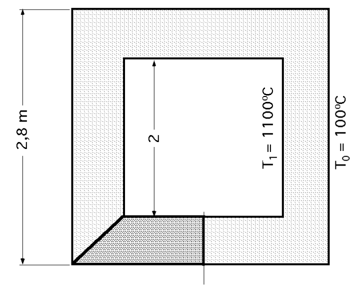
$$\text{Eje y} = T_1 - T_0 = \frac{y}{L_y} + \frac{1}{\pi} \{\ln \frac{L_x^2 + L_y^2}{4 L_x^2}) + \frac{L_y}{L_x} \text{arc tg} \frac{L_x}{L_y}\}$$

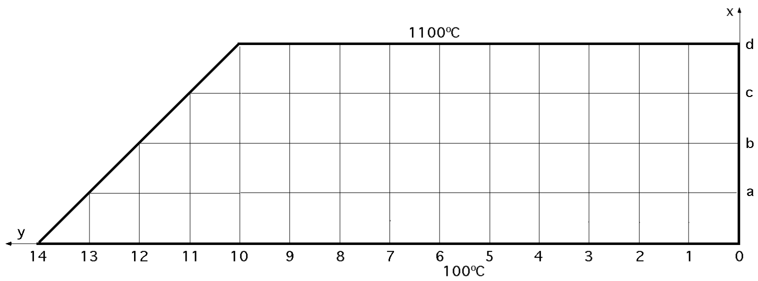
b) Calor disipado al exterior

$$q = \frac{T_1 - T_0}{R} = \frac{1100 - 100}{\dfrac{1}{2{,}2235}} = 2223{,}5 \frac{Kcal}{h.m}$$

MÉTODO NUMÉRICO

Consideraremos mallas cuadradas de (0,1 x 0,1) m ; tomamos 1/8 de sección.





Los puntos en contacto con la superficie exterior están a 100ºC

$T_{0-0} = T_{0-1} = T_{0-2} = T_{0-3} = ... = T_{0-14} = 100ºC$

Los puntos en contacto con la superficie interior están a 1100ºC

$T_{d-0} = T_{d-1} = T_{d-2} = T_{d-3} = ... = T_{d-10} = 1100ºC$

A su vez:

$T_{1-a} = T_{-1-a}$; $T_{1-b} = T_{-1-b}$

$T_{12-a} = T_{13-b}$; $T_{11-b} = T_{12-c}$; $T_{10-c} = T_{11-d}$

Nudos interiores: $T_A + T_B + T_C + T_D = 4\ T_i$

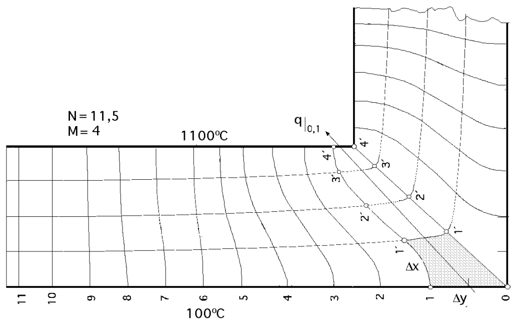
La resolución de estas ecuaciones proporciona la siguiente tabla de valores:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	350	349	348	347	347	347	346	342	335	320	292	252	205	152
b	600	599	598	597	596	596	594	588	572	552	499	417	311	---
c	850	850	849	847	846	846	845	842	836	810	755	586	---	---

Cantidad de calor que se pierde al exterior por el octante: $q = 282{,}4\ \dfrac{Kcal}{h.m}$

Calor que se pierde al exterior para todo el bloque: $Q = 282{,}4 \times 8 = 2259{,}2\ \dfrac{Kcal}{h.m}$

MÉTODO GRÁFICO



La cantidad de calor por unidad de altura que pasa a través del elemento (0,1), (1,1´) es:

$$q|_{0-1} = k\ (T_{1'} - 100)\ \frac{(11')}{(10)} = q|_{1'-1'} = q|_{2'-2'} = q|_{3'-3'} \ ...$$

Si los cuadriláteros se han construido de forma que la suma de los dos lados opuestos sean iguales, se cumple:

$$\frac{(11')}{(10)} \quad \frac{(1'2')}{(1'1')} \quad \frac{(2'3')}{(2'2')} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

por lo que:

$$q|_{0-1} = k\ (1100 - 100)\ (1 + 1 + 1 + 1) = 4000\ k$$

Si el número de cuadrados curvilíneos es M, se tiene:

$$q|_{0-1} = k\ \frac{\Delta T}{M} = k\ \frac{1100 - 100}{M}$$

Análogamente para la cantidad de calor que atraviesa las isotermas: (0-1) , (1-2), ... (10-11) , (11-12)

$$q = q|_{0-1} + q|_{0-2} + ... = N\ q|_{0-1}$$

Cantidad de calor total para toda la sección:

$$Q = k\ \frac{N}{M}\ (1100 - 100) \times 8 = \frac{11{,}5}{4} \times 0{,}1 \times (1100 - 100) \times 8 = 2200\ \frac{Kcal}{h\ m}$$

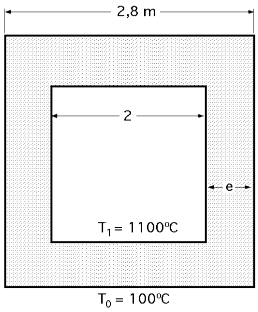
MÉTODO DEL FACTOR DE FORMA

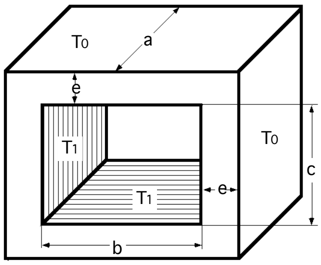
$$e = 0{,}4\ m\ ;\ \frac{e}{5} = \frac{0{,}4}{5} = 0{,}08\ m\ ;\ \left\{ \begin{matrix} a = 1\ m\ ;\ a > e/5 \\ b = 2\ m\ ;\ b > e/5 \\ c = 2\ m\ ;\ c > e/5 \end{matrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{matrix} F = \dfrac{A_1}{e} + 2{,}16\ (a + b + c) + 1{,}2\ e \\ (a,b,c) > e/5 \end{matrix} \right\}$$

Area de la superficie interna: $A_1 = (2 \times 2) \times 1 = 4\ m^2$

$$F = \frac{4}{0{,}4} + 2{,}16\ (1 + 2 + 2) + (1{,}2 \times 0{,}4) = 21{,}28$$

$$q = k\ F\ (T_1 - T_0) = 0{,}1 \times 21{,}28 \times (1100 - 100) = 2128\ \frac{Kcal}{h.m}$$





****

II.28.- Para el almacenamiento de productos radiactivos de conductividad térmica k_r = 20 W/mºC se utilizan contenedores cilíndricos de acero k_a= 15 W/mºC, de diámetro interior 1 metro y espesor 0,1 m.
La energía generada por el material radiactivo tiene un flujo térmico, E = 10^5 W/m³.
Los contenedores se sumergen en el fondo marino en donde el agua está a 5ºC. Los contenedores están unidos por sus bases conformando un cilindro continuo en posición horizontal, estando sometidos a unas corrientes marinas horizontales, normales a los contenedores, de velocidad 0,1 m/seg.
Determinar
a) El coeficiente de película contenedor-agua
b) La temperatura de la pared del contenedor exterior e interior
c) La temperatura en el eje del contenedor, y a una distancia radial de 0,3 m
d) La fuerza de arrastre por cada 50 metros de longitud de contenedores
Propiedades medias de la película de agua en contacto con los contenedores:
ρ = ***995 kg/m³; c_p = 4,18 kJ/kg.ºK; k = 0,61 W/mºK ;*** α = ***0,148.10⁻⁶ m²/seg ;*** ν = ***0,8 .10⁻⁶ m²/seg ; Pr = 6***

RESOLUCIÓN

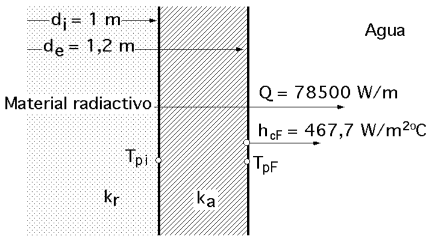
a) Coeficiente de película contenedor-agua

$$Re = \frac{u_F\ d}{\nu} = \frac{0{,}1\ m \times 1{,}2\ m/seg}{0{,}8.10^{-6}\ m^2/seg} = 150.000$$

$$Nu = C\ Re^n\ Pr^{1/3} = \left| \begin{matrix} C = 0{,}0266 \\ n = 0{,}805 \end{matrix} \right| = 0{,}0266 \times 150000^{0{,}805} \times 6^{1/3} = 710$$

$$710 = \frac{h_{cF}\ d}{k} = \frac{710 \times 0{,}6}{1{,}2} = 355\ \frac{W}{m^2\ ºC}$$

b) Temperatura exterior e interior de la pared del contenedor



Se considerará conducción monodimensional radial, viniendo los resultados por unidad de longitud del cilindro 1 m. La energía que generan los productos radiactivos atraviesan las paredes del contenedor y se disipa al exterior (agua) por convección.
El calor generado por los residuos radiactivos por unidad de longitud del cilindro es:

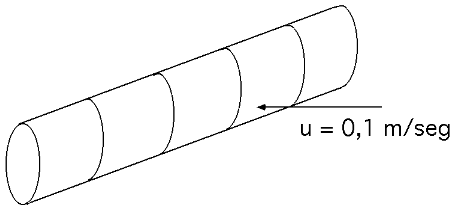
$$Q = E\,V = E \times \pi r^2 = 10^5 \frac{W}{m^3} \times \pi \times 0{,}5^2 \ m^2 = 78.500 \ \frac{W}{m}$$

Temperatura exterior del contenedor T_{pF}

$$Q = \frac{T_{pF} - T_{agua}}{\dfrac{1}{2\ \pi r_e h_{cF}}} = \frac{T_{pF} - 5\ \ ºC}{\dfrac{1}{2\ \pi \times 0{,}6\ m \times 355\ (W/m^2\ ºC)}} = 78800\ \frac{W}{m} \qquad T_{pF} = 63{,}65ºC$$

Temperatura interior del contenedor T_{pi}

$$Q = \frac{T_{pi} - T_{pF}}{\dfrac{1}{2\ \pi k} \ln \dfrac{r_e}{r_i}} = \frac{T_{pi} - 63{,}65ºC}{\dfrac{1}{2\ \pi \times 15\ W/mºC} \ln \dfrac{0{,}6}{0{,}5}} = 78800\ \frac{W}{m} \qquad T_{pi} = 215{,}5ºC$$



c) Temperatura en el eje del contenedor

Dentro de los residuos se establece un problema de generación de energía, por lo que la $T_{máx}$ se tiene en la línea del eje central

$$T_{máx} = T_{pi} + \frac{E\ r_i^2}{4\ k_r} = 215{,}5\ \ ºC + \frac{10^5 (W/m^3) \times 0{,}5^2\ m^2}{4 \times 20\ (W/mºC)} = 528ºC$$

Temperatura a una distancia radial de 0,3 m:

$$T_{r=0,3} = T_{pi} + \frac{E\ r_i^2}{4\ k_r} \{1 - (\frac{r}{r_i})^2\} = 215{,}5ºC + \frac{10^5\ (W/m^3) \times 0{,}5^2\ m^2}{4 \times 20\ (W/mºC)} \{1 - (\frac{0{,}3}{0{,}5})^2\} = 415{,}65ºC$$

d) La fuerza de arrastre por cada 50 metros de longitud de contenedores

$$F_{arrastre} = \frac{C_W\ \rho\ u_F^2\ A_{Frontal}}{2} = \left| \begin{array}{l} Re = 150000 \qquad C_W = 1{,}6 \\ A_{Frontal} = 50 \times 1{,}2 = 60\ m^2 \end{array} \right| = 1{,}6 \times 996 \frac{Kg}{m^3} \times 0{,}1^2 \frac{m^2}{seg^2} \times 60\ m^2 = 477{,}6\ N$$

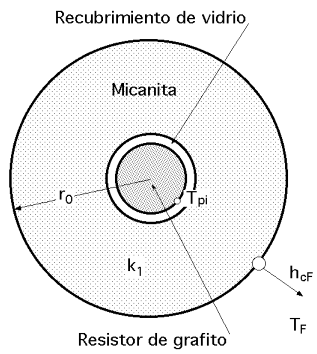
****

II.29.- Un resistor de grafito de 0,5 W tiene un diámetro de 1 mm y una longitud de 20 mm siendo su conductividad térmica k = 0,25 W/mºC; el resistor está recubierto por una delgada capa de vidrio (de resistencia térmica insignificante) y encapsulado en micanita (mica molida pegada con resina fenólica) de conductividad térmica k_1= 0,1 W/mºK.

La micanita sirve para aumentar la resistencia eléctrica y la pérdida de calor. Suponiendo que el 50% del calor del resistor se disipa por convección y radiación desde la superficie exterior de la micanita hasta el entorno que se encuentra a 300ºK, siendo el coeficiente de transferencia de calor por convección y radiación $h_{conv+rad}$ = 16 W/m²ºK, y que el otro 50% se conduce mediante unos conductores de cobre hacia un circuito, de forma que no participa en la disipación de calor al exterior, se pide:

a) El radio que dará el máximo enfriamiento

b) La temperatura del resistor en la periferia y en el núcleo



RESOLUCIÓN

a) El radio que proporciona el máximo enfriamiento (disipación de calor máxima) es el radio crítico:

$$r_C = \frac{k_1}{h_{cF}} = \frac{0{,}1}{16} = 0{,}00625\ m$$

b) Temperatura en la periferia del resistor de grafito T_{pi} sabiendo que el calor disipado por convección es el 50% del generado por el resistor:

$$Q = \frac{2\ \pi L\ (T_{pi} - T_{pF})}{\dfrac{1}{k_1} \ln \dfrac{r_0}{r_i} + \dfrac{1}{r_0\ h_{cF}}} \qquad T_{pi} = T_0 + \frac{Q}{2\ \pi L} (\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{r_0\ h_{cF}}) =$$

$$= 300ºK + \frac{(0{,}5/2)\ W}{2\ \pi \times 0{,}02} (\frac{1}{0{,}1} \ln \frac{6{,}25}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}00625 \times 16}) = 300 + 70{,}1 = 370{,}1ºK = 97{,}1ºC$$

Distribución de temperaturas en el núcleo del resistor:

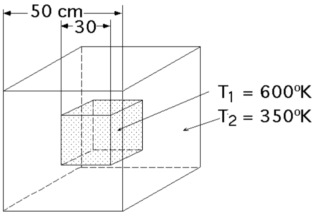
$$T_{núcleo} = T_{pi} + \frac{E}{4\,k}\,(r_i^2 - r^2) = \left|\, E = \frac{Q}{V} = \frac{0{,}5\ W}{\pi r_i^2 L} = \frac{0{,}5\ W}{\pi \times 0{,}0005^2 \times 0{,}02\ m^3} = 31{,}83.10^6\ \frac{W}{m^3} \,\right| =$$

$$= 97{,}1 + \frac{31{,}83.10^6\ W/m^3}{4 \times 0{,}25\ W/mºC}\,(0{,}0005^2 - r^2)\ m^2 = 97{,}1 + 31{,}83.10^6 \times (0{,}0005^2 - r^2)\ ºC$$

Temperatura en el centro del resistor (r = 0):

$$T_{núcleo} = T_{pi} + \frac{E\,r_i^2}{4\,k} = 97{,}1 + (31{,}83.10^6 \times 0{,}0005^2) = 97{,}1 + 7{,}96 = 105{,}05ºC = 378{,}05ºK$$

****



II.30.- Un pequeño horno de forma cúbica (que se comporta como una cavidad que está aislada térmicamente del exterior, de 30 cm de arista interior y 50 cm de arista exterior), está conformado por paredes de 10 cm de espesor, de material aislante (fibra de vidrio); las paredes interiores tienen una temperatura de 600ºK y las exteriores de 350ºK. La conductividad térmica media de la fibra de vidrio en el rango de temperaturas anterior se estima en 0,11 W/mºK.

Determinar la energía necesaria para mantener el horno funcionando en forma continua, régimen estacionario

---

RESOLUCIÓN

El calor intercambiado entre el interior del horno y el exterior se realiza en la siguiente manera:

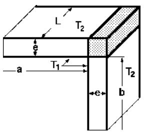
- A través de 6 caras de dimensiones 0,3 x 0,3 m^2
- A través de 8 esquinas de dimensiones (0,1 x 0,1 x 0,1) m^3
- A través de 12 bordes de dimensiones (0,1 x 0,1 x 0,3) m^3

Se observa que a través de las caras se puede aplicar la teoría unidimensional de transmisión de calor, pero no en las otras dos situaciones, en las que la conducción sería bi y tridimensional. Para resolver el problema recurrimos al concepto del Factor de Forma de la conducción, según el cual se tiene:

- A través de 1 cara de dimensiones 0,3 x 0,3 m^2 :

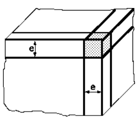
$$Q_1 = k\,F\,\Delta T = k\,\frac{A}{e}\,\Delta T = 0{,}11\,\frac{W}{mºK}\,\frac{0{,}3 \times 0{,}3\ m^2}{0{,}1 m}\,(600 - 350)ºK = 24{,}75\ W$$

- A través de una arista intersección de dos paredes planas de espesor e= 0,1m, anchura L= 0,3, temperatura interior T_1= 600ºK y temperatura exterior T_2= 350ºK



$$Q_2 = k\,F\,\Delta T = \left|\, F = 0{,}54\,L\ ;\ a > \frac{e}{5} \,\right| = 0{,}11\,\frac{W}{mºK}\,(0{,}54 \times 0{,}3\ m)\,(600 - 350)ºK = 4{,}455\ W$$

- A través de una esquina intersección de tres paredes planas de espesor e, con temperatura interior T_1 y temperatura exterior T_2



$$Q_3 = k\,F\,\Delta T = \left|\, F = 0{,}15\,e\ ;\ a > \frac{e}{5} \,\right| = 0{,}11\,\frac{W}{mºK}\,(0{,}15 \times 0{,}1\ m)\,(600 - 350)ºK = 0{,}4125\ W$$

El calor intercambiado con el medio exterior es:

$$Q = 6\,Q_1 + 12\,Q_2 + 8\,Q_3 = (6 \times 24{,}75) + (12 \times 4{,}455) + (8 \times 0{,}4125) = 205{,}25\ W$$

****